

ИЗВЕСТИЯ  
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Северо-Кавказский  
регион*

---

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2016

2

## **Журнал основан в 1972 г. Ю.А. Ждановым**

### **Главная редакция:**

В.И. Колесников (главный редактор),  
В.Е. Закруткин, В.С. Золотарев, А.В. Павленко (заместители главного редактора),  
Е.А. Шинкаренко (отв. секретарь)

### **Редакционный совет:**

В.А. Бабешко, Б.С. Карамурзов, В.И. Колесников, Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев,  
В.Г. Лобанов, Г.Г. Матишов, В.И. Минкин, М.Х. Рабаданов, Э.З. Эмирбеков

### **Редакционная коллегия:**

В.Е. Закруткин – председатель редколлегии (д. г.-м.н., профессор), А.В. Абанин (д.ф.-м.н., профессор),  
В.В. Внуков (д.б.н., профессор), Л.С. Ворович (к.ф.-м.н., доцент), Ю.М. Гуфан (д.ф.-м.н., профессор),  
О.Н. Демина (д.б.н.), А.Г. Захаров (д.техн.н., профессор), Л.М. Зубов (д.ф.-м.н., профессор),  
Я.М. Ерусалимский (д.техн.н., профессор), С.Б. Климентов (д.ф.-м.н., профессор),  
Г.В. Куповых (д.ф.-м.н., профессор), С.В. Курбатов (д.х.н., профессор),  
А.М. Лерер (д.ф.-м.н., профессор), В.А. Миноранский (д.с.-х.н., профессор),  
А.Ф. Пожарский (д.х.н., профессор), З.А. Темердашев (д.х.н., профессор),  
В.Н. Труфанов – зам. пред. редколлегии (д.г.-м.н., профессор),  
Ю.А. Устинов (д.ф.-м.н., профессор), Ю.А. Федоров (д.г.н., профессор),  
С.П. Чернышева (к.ф.-м.н., доцент), О.М. Шабанов (д.х.н., профессор)

### **Учредители:**

Министерство образования и науки Российской Федерации, Дагестанский государственный технический университет, Дагестанский государственный университет, Донской государственный технический университет, Кабардино-Балкарский государственный университет, Кубанский государственный технологический университет, Кубанский государственный университет, Пятигорский государственный лингвистический университет, Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростовский государственный экономический университет, Северо-Осетинский государственный университет, Северо-Кавказский федеральный университет, Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова, Южно-Российский институт управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Южный федеральный университет

Над номером работали: Т.А. Ватульян, Л.С. Ворович, В.И. Литвиненко, С.П. Чернышева, М.С. Шипитко.

Подписано в печать 16.06.2016 г.  
Формат 60×84/8. Гарнитура "Таймс".  
Усл. печ.л. 13,48. Уч.-изд. л. 14,25.  
Тираж 200 экз. Заказ № 5218.

### **Адрес редакции и издателя (для переписки):**

**344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42,**  
**ЮФУ, журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион»**  
**E-mail: [izvestiya@sfedu.ru](mailto:izvestiya@sfedu.ru)**  
**Адрес в Интернете: [www.izvestiya.sfedu.ru](http://www.izvestiya.sfedu.ru)**

Адрес редколлегии серии «Естественные науки»: г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 2, к. 110,  
тел.: (863) 218-40-00 доб. 11-093; (863) 218-40-00 доб. 11-094.  
Адрес типографии: 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 1, к. 104.  
Издательско-полиграфический комплекс КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.

# ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

Регистрационный номер 011019  
Комитета Российской Федерации по печати  
Научно-образовательный и прикладной журнал  
Издается с 1973 г.  
Периодичность серии 4 номера в год  
№ 2 (190) 2016 г.

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

---

### СОДЕРЖАНИЕ

<b>ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ</b>	<i>Абанин А.В., Юделевич В.В.</i> Об обращении теоремы Штольца..... 5
	<i>Абдулрахман Х., Скороходов В.А.</i> Полные двухресурсные сети с петлями..... 10
	<i>Авсянкин О.Г., Ковальчук А.М.</i> Операторы мультипликативной дискретной свертки, содержащие оператор комплексного сопряжения..... 17
	<i>Акопов А.А.</i> Исследование рассеивающих свойств многослойных сферических наночастиц..... 22
	<i>Батищев В.А., Гетман В.А., Перекрестов В.В.</i> Термогравитационное течение неоднородной жидкости в пограничном слое вблизи свободной границы..... 29
	<i>Ватульян А.О., Потетюнко О.А.</i> О колебаниях неоднородной пластины с упруго опертым краем ..... 35
	<i>Деундяк В.М., Кнутова А.В.</i> Интегрируемость систем полиномов нескольких переменных первой и второй степени над простыми полями Галуа ..... 41
	<i>Донец И.В., Цветковская С.М.</i> Исследование дифракции электромагнитных волн на многослойных нелинейных диэлектриках..... 47
<i>Карякин М.И., Шубчинская Н.Ю.</i> Об устойчивости нелинейно-упругого цилиндра с собственными напряжениями при растяжении и сжатии..... 54	
<b>БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ</b>	<i>Кандашова К.А., Казеев К.Ш., Колесников С.И.</i> Изменение эколого-биологических свойств почв Юга России при оглеении ..... 61
	<i>Кузина А.А., Колесников С.И., Казеев К.Ш., Акименко Ю.В.</i> Влияние загрязнения тяжелыми металлами и нефтью на фитотоксичность почв Черноморского побережья Кавказа..... 68
	<i>Чохели В.А., Козловский Б.Л., Серeda М.М., Вардуни Т.В.</i> Результаты изучения фенологических форм <i>Quercus robur</i> L. с помощью ISSR-маркеров ..... 72
<b>НАУКИ О ЗЕМЛЕ</b>	<i>Астахова А.А., Хардигов А.Э., Холодная И.А.</i> О роли вулканогенного материала в образовании атканской свиты Аян-Юрхского антиклинория Яно-Колымской складчатой области ..... 78
	<i>Жбанков Г.А.</i> Особенности решения лучевых уравнений для крутопадающих на ионосферу траекторий..... 86

	<i>Закруткин В.Е., Гибков Е.В., Скляренко Г.Ю., Решетняк О.С.</i> Сравнительная оценка качества поверхностных и подземных вод Восточного Донбасса по гидрохимическим показателям.....	91
	<i>Кипкеева П.А., Потапенко Ю.Я.</i> Геоморфологические особенности днища долины р. Теберды (Северный Кавказ) .....	100
<b>НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ</b>	<i>Ватульян А.О., Карякин М.И.</i> XI Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете».....	105
	<i>Миноранский В.А.</i> Охрана донской природы. Фестивали «Воспетая степь» .....	106
	<i>Шкурат Т.П.</i> Фармакогенетика и персонализированная медицина – индивидуальный подбор лекарственных средств .....	108
<b>НАШИ ЮБИЛЯРЫ</b>	<i>Ватульян А.О., Пряхина О.Д.</i> Талантливый ученый, просветитель, наставник (к юбилею В.А. Бабешко) .....	110
<b>ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ</b>	<i>Пухначев В.В.</i> Дальнодействие (памяти В.И. Юдовича).....	113



# IZVESTIYA VUZOV. SEVERO-KAVKAZSKII REGION

Reg. No. 011019

Of the Committee of the Press of the Russian Federation

Scientifically educational and applied magazine

Was founded in 1973.

Period is 4 numbers per a year

№ 2 (190) 2016.

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2

## NATURAL SCIENCE

---

### CONTENTS

<b>PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES</b>	<i>Abanin A.V., Yudelevich V.V.</i> On the Converse Stoltz Theorem .....5
	<i>Abdulrahman H., Skorokhodov V.A.</i> Complete Biresources Networks with Loops.....10
	<i>Avsyankin O.G., Koval'chuk A.M.</i> Multiplicative Discrete Convolution Operators with Complex Conjugate Operator .....17
	<i>Akopov A.A.</i> Study of the Scattering Properties of Multilayered Spherical Nanopar- ticles .....22
	<i>Batishchev V.A., Getman V.A., Perekrstov V.V.</i> Thermogravitational Flow of Non-Uniform Fluid in the Boundary Layer Near the Free Surface .....29
	<i>Vatulyan A.O., Potetyunko O.A.</i> About Oscillations of Heterogeneous Plate with a Resilient Support Edge .....35
	<i>Deundyak V.M., Knutova A.V.</i> Integrability of Systems of the First and Second Degree Polynomials of Several Variables over Simple Galois Fields .....41
	<i>Donets I.V., Tsvetkovskaya S.M.</i> Investigation Electromagnetic Wave Diffraction by Multilayer Nonlinear Dielectrics .....47
	<i>Karyakin M.I., Shubchinskaya N.Yu.</i> On Stability of Nonlinearly Elastic Cylinder with Internal Stresses under Tension and Compression.....54
<b>BIOLOGICAL SCIENCE</b>	<i>Kandashova K.A., Kazeev K.Sh., Kolesnikov S.I.</i> Changes in Ecological and Bio- logical Properties of Soils of the South of Russia at Gleyisation.....61
	<i>Kuzina A.A., Kolesnikov S.I., Kazeev K.Sh., Akimenko Yu.V.</i> Pollution Influence by Heavy Metals and Oil on Phytotoxicity of Black Sea Coast Soils of the Caucasus...68
	<i>Chokheli V.A., Kozlovskii B.L., Sereda M.M., Varduni T.V.</i> Results of the Study of Phenological Forms <i>Quercus Robur</i> L. Using ISSR Markers .....72
<b>SCIENCE OF EARTH</b>	<i>Astakhova A.A., Khardikov A.E., Kholodnaya I.A.</i> On the Role of Volcanic Material in the Formation of Atkan Suite of Ayan-Yuryakh Anticlinorium of Yan- Kolya Folded Area.....78
	<i>Zhbankov G.A.</i> Particular Qualities of the Solution of the Radial Equation for the Steep Trajectories in the Ionosphere .....86
	<i>Zakrutkin V.E., Gibkov E.V., Sklyarenko G.Yu., Reshetnyak O.S.</i> Comparative Evaluation of the Quality of Eastern Donbass Surface and Groundwater by the Hydrochemical Indicators.....91

	<i>Kipkeeva P.A., Potapenko Yu.Ya.</i> The Geomorphological Features of Teberda River Valley Bottom (Northern Caucasus).....	100
<b>SCIENTIFIC LIFE</b>	<i>Vatulyan A.O., Karyakin M.I.</i> XI All-Russian Seminar School “Mathematical Modeling and Biomechanics in the Modern University”.....	105
	<i>Minoranskii V.A.</i> Protection of the Don Nature. Festivals “Celebrated Steppe” .....	106
	<i>Shkurat T.P.</i> Pharmacogenetics and Personalized Medicine - Individual Selection of Medicines.....	108
<b>OUR PERSONS</b>	<i>Vatulyan A.O., Pryakhina O.D.</i> A Talented Scientist, Educator, Mentor (for the Anniversary V.A. Babeshko).....	110
<b>TOUCHES TO THE PORTRAIT</b>	<i>Pukhnachev V.V.</i> Long-Range (in Memory of V.I. Yudovich) .....	113

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.521

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-5-9

### ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ШТОЛЬЦА

© 2016 г. А.В. Абанин, В.В. Юдеlevич

*Абанин Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: abanin@math.sfedu.ru*

*Abanin Alexander Vasilievich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of the Mathematical Analysis, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: abanin@math.sfedu.ru*

*Юдеlevич Виталий Викторович – студент, кафедра математического анализа, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090; e-mail: Vitaliiyudelevich@mail.ru*

*Yudelevich Vitaly Viktorovich – Student, Department of the Mathematical Analysis, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: Vitaliiyudelevich@mail.ru*

*Рассматривается вопрос об обращении обобщенной теоремы Штольца. Получены условия на эталонную последовательность, при которых полный или ослабленный вариант такого обращения справедлив на классе всех положительных последовательностей. Та же задача исследована на важном подклассе выпуклых последовательностей, используемых в теориях ультрадифференцируемых и целых функций. Доказано, что установленные результаты неулучшаемы. Построены примеры, показывающие, что найденные в работе оценки на подклассе выпуклых последовательностей точнее, чем аналогичные оценки на классе всех положительных последовательностей.*

**Ключевые слова:** теорема Штольца, метод Чезаро, выпуклые последовательности.

*We consider the problem when the converse generalized Stoltz theorem is true. We obtain some conditions on the comparison sequence under which the complete or weak version of such a result is true on the family of all positive sequences. The same problem is solved for the important subclass of convex sequences which used in the theories of ultradifferentiable and entire functions. It is proved that our results cannot be improved. We construct some examples showing that the estimates found out for the class of convex sequences are better than the similar estimates for the class of all positive sequences.*

**Keywords:** Stoltz theorem, Cesaro method, convex sequences.

#### Постановка задачи

Обозначим через  $S$  множество всех строго возрастающих бесконечно больших последовательностей  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  вещественных чисел. Без ограничения общности будем считать, что все члены последовательностей из  $S$  положительны. Следующий результат представляет собой обобщение теоремы Штольца.

**Теорема 1.** Пусть  $y \in S$ . Тогда для любой последовательности  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  вещественных чисел имеют место неравенства

$$\liminf \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \liminf \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup \frac{x_n}{y_n} \leq \limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

В качестве следствия из нее вытекает классическая теорема Штольца.

**Следствие 1.** Пусть  $y \in S$  и для последовательности  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  вещественных чисел существует (конечный или бесконечный) предел  $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ .

Тогда существует  $\lim \frac{x_n}{y_n}$  и  $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{x_n}{y_n}$ .

Приведенные результаты можно трактовать как дискретные аналоги правила Лопиталья. С другой стороны, они содержат в себе классический метод Чезаро суммирования расходящихся рядов. Именно, положив  $y_n = n$  и взяв в качестве  $x$  последовательность частичных сумм какого-либо ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , получим

**Следствие 2.** Если для ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  существует (конечный или бесконечный)  $\lim a_n$ , то  $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim a_n$ .

В ряде задач возникает необходимость использования обращения правила Лопиталя. Например, в теории роста целых функций [1, 2] и при исследовании операторов дифференцирования и интегрирования в весовых пространствах голоморфных функций [3]. Ограничения на функции, при которых справедливы различные варианты обращения правила Лопиталя, исследовались А.В. Братищевым [1] и Г.Г. Брайчевым [2]. В настоящей заметке систематически исследуется вопрос об обращении теоремы Штольца. Насколько нам известно, ранее он не изучался. Ясно, что в общем случае обращение теоремы Штольца, т.е. получение оценки сверху  $\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$  через  $\limsup \frac{x_n}{y_n}$  или  $\liminf \frac{x_n}{y_n}$  через  $\liminf \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ , невозможно. Поэтому имеет смысл выяснить некоторые общие ограничения на  $y$  (или на  $x$ ), при которых оценки, обратные участвующим в теореме Штольца, все же имеют место.

#### Обращение теоремы Штольца на классе всех положительных последовательностей

Положим  $\beta_y := \limsup \frac{y_n}{y_{n+1}}$ . Ясно, что для любой последовательности  $y \in S$  имеем, что  $0 \leq \beta_y \leq 1$ . При этом, если  $\beta_y = 0$ , то из-за положительности членов  $y$  существует  $\lim \frac{y_n}{y_{n+1}} = 0$ . Последовательности  $y$ , для которых  $\beta_y = 0$ , будем называть быстрорастущими. Обозначим через  $\omega$  пространство всех последовательностей вещественных чисел, через  $\omega^+$  – его подпространство, состоящее из последовательностей, все члены которых неотрицательны, начиная с некоторого номера. Очевидно, что  $S \subset \omega^+$ .

**Предложение 1.** Пусть  $y \in S$  такова, что  $\beta_y < 1$ . Тогда для любой последовательности  $x \in \omega^+$ ,

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \frac{1}{1 - \beta_y} \cdot \limsup \frac{x_n}{y_n}. \quad (1)$$

*Доказательство.* В самом деле, так как  $x \in \omega^+$ , то существует такое  $n_0 \in N$ , что  $x_n \geq 0$  при  $n_0 \geq 0$ . Тогда при  $n \geq n_0$  имеем

$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - y_n / y_{n+1}}$ , откуда следует требуемое.

Следующий результат показывает, что оценка (1) точна, причем в усиленном смысле – на подклассе  $S \subset \omega^+$ .

**Предложение 2.** Для любой последовательности  $y \in S$  с  $\beta_y < 1$  имеется такая последовательность  $x \in S$ , для которой

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{1 - \beta_y} \cdot \limsup \frac{x_n}{y_n}, \quad (2)$$

причем  $x$  можно выбрать так, чтобы верхние пределы, фигурирующие в последнем равенстве, были конечны.

*Доказательство.* Без требования конечности верхних пределов в (2) нужную последовательность  $x$  можно построить, положив  $x_1 := 1$  и

$$x_{n+1} := \prod_{s=1}^n \left( \frac{1}{1 - \beta_y} \cdot \frac{y_{s+1} - y_s}{y_s} + 1 \right) \quad \text{при } n \geq 1. \quad \text{Тогда}$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{1 - \beta_y} \cdot \frac{x_n}{y_n} \quad \text{при всех } n \in N, \quad \text{откуда следует}$$

(2). При этом очевидно, что  $x$  строго возрастает.

Кроме того,  $\liminf \left( \frac{1}{1 - \beta_y} \cdot \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n} + 1 \right) > \frac{1}{\beta_y} + 1 > 2$

(считаем, что  $\frac{1}{\beta_y} = +\infty$  при  $\beta_y = 0$ ). Поэтому

$x_n \rightarrow \infty$  и, значит,  $x \in S$ .

Чтобы добиться конечности верхних пределов в (2), построение  $x$  можно осуществить следующим образом. Возьмем подпоследовательность  $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

так, чтобы  $\lim \frac{y_{n_k}}{y_{n_{k+1}}} = \beta_y$ . Положим  $x_{n_1} := \frac{1}{2} \cdot y_{n_1}$ ,

$x_{n_1+1} := y_{n_1+1}$ . Обозначим  $n_1 := m_1$  и найдем настоль-

ко большой номер  $n_k$ , что  $\frac{1}{3} \cdot y_{n_k} > y_{m_1+1}$ . Положим

$n_k := m_2$ ,  $x_{m_2} := \frac{1}{3} \cdot y_{n_k} = \frac{1}{3} \cdot y_{m_2}$ ,  $x_{m_2+1} := y_{m_2+1}$ . Про-

должив этот процесс, получим последовательность  $x_{m_1}, x_{m_1+1}, x_{m_2}, x_{m_2+1}, \dots$ , у которой  $x_{m_s} := \frac{1}{s} \cdot y_{m_s}$ ,

$x_{m_s+1} = y_{m_s+1}$ , а  $(m_s)_{s=1}^{\infty}$  – некоторая подпоследовательность

последовательности  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ . Первые члены  $x_1, x_2, \dots, x_{m_1-1}$  выберем произвольно, лишь

бы  $x_1 < x_2 < \dots < x_{m_1-1} < x_{m_1}$ . Затем при каждом

$s \in N$  возьмем  $x_{m_s+2}, \dots, x_{m_{s+1}-1}$  так, чтобы

$x_{m_s+1} < x_{m_s+2} < x_{m_s+3} < \dots < x_{m_{s+1}-1} < x_{m_{s+1}}$  и  $x_{m_s+1} \leq y_{m_s+1}$

( $l = 2, \dots, m_{s+1} - m_s - 3$ ). Ясно, что этот выбор всегда возможен. Из построения  $(x_n)_{n=1}^\infty$  следует, что

$$\frac{x_n}{y_n} \leq 1 \text{ при всех } n \geq m_1, \quad \frac{x_{m_s+1}}{y_{m_s+1}} = 1 \text{ при всех } s \in N.$$

Отсюда следует, что  $\limsup \frac{x_n}{y_n} = 1$ . Применяв предложение 1, заключаем, что тогда

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \frac{1}{1 - \beta_y}. \text{ С другой стороны,}$$

$$\begin{aligned} \limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &\geq \limsup \frac{x_{m_s+1} - x_{m_s}}{y_{m_s+1} - y_{m_s}} = \\ &= \limsup \frac{y_{m_s+1} - \frac{1}{s} \cdot y_{m_s}}{y_{m_s+1} - y_{m_s}} = \frac{1}{1 - \beta_y}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{1 - \beta_y} = \frac{1}{1 - \beta_y} \cdot \limsup \frac{x_n}{y_n}.$$

Из теоремы 1 и предложений 1, 2 следует, что полное обращение обобщённой теоремы Штольца для верхних пределов имеет место для быстрорастущих последовательностей  $y$ , и только для них.

**Предложение 3.** Пусть  $y$  – быстрорастущая последовательность из  $S$ . Тогда для любой последовательности  $x \in \omega^+$  справедливо равенство

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \limsup \frac{x_n}{y_n}. \quad (3)$$

Обратно, если равенство (3) выполняется на классе  $S \subset \omega^+$ , то  $y$  является быстрорастущей.

Следующий результат показывает, что условие  $\beta_y < 1$  в предложении 1 существенно для его справедливости.

**Предложение 4.** Для любой последовательности  $y$  из  $S$  с  $\beta_y = 1$  существует такая последовательность  $x \in S$ , для которой

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty, \text{ а } \limsup \frac{x_n}{y_n} = 0. \quad (4)$$

*Доказательство.* Так как  $\beta_y = 1$ , то существует такая подпоследовательность  $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ , что

$$\lim \frac{y_{n_k+1}}{y_{n_k}} = 1. \quad (5)$$

Положим  $\limsup y_{n_k} (y_{n_k+1} - y_{n_k}) =: l$ . Ясно, что  $l \in [0, +\infty]$ . Дальнейшие рассуждения проведем отдельно для бесконечного и конечного  $l$ .

1. Пусть  $l = +\infty$ . Не ограничивая общности, можно считать, что

$$y_{n_1} (y_{n_1+1} - y_{n_1}) > 1; \quad (6)$$

$$9y_{n_k} (y_{n_k+1} - y_{n_k}) < y_{n_{k+1}} (y_{n_{k+1}+1} - y_{n_{k+1}}), \quad (7)$$

при всех  $k \in N$ .

Обозначим  $\beta_k := \frac{y_{n_{k+1}} - y_{n_k}}{y_{n_k}}$ . Из (5) следует, что

$\beta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Положим  $x_{n_k} := \sqrt{\beta_k} y_{n_k}$ ,  $x_{n_{k+1}} := 2x_{n_k}$ . Тогда неравенство (6) эквивалентно тому, что  $x_{n_1} > 1$ . Очевидно, что  $x_{n_{k+1}} > x_{n_k}$ . Далее, (7) равносильно тому, что  $3x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$  при всех  $k \in N$ . Тем более

$$x_{n_{k+1}} = 2x_{n_k} < x_{n_{k+1}} - 1. \quad (8)$$

Из сказанного вытекает, что последовательность  $x = (x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots)$  относится к классу  $S$ . Имеем

$$\lim \frac{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}}{y_{n_{k+1}} - y_{n_k}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\beta_k}} = +\infty; \quad (9)$$

$$\lim \frac{x_{n_k}}{y_{n_k}} = \lim \sqrt{\beta_k} = 0 \text{ и}$$

$$\lim \frac{x_{n_{k+1}}}{y_{n_{k+1}}} = \lim 2 \cdot \sqrt{\beta_k} = 0. \quad (10)$$

Теперь дополним  $x$ , определив ее члены с отсутствующими номерами следующим образом:

$$x_{n_k+j} := x_{n_{k+1}} + \sum_{i=2}^j \frac{1}{2^{i-1}}, \quad j = 2, \dots, n_{k+1} - n_k - 1, \quad k \in N.$$

Тогда, с учетом (8),  $x_{n_{k+1}} < x_{n_{k+2}} < \dots < x_{n_{k+1}}$  при всех  $k \in N$ . Отсюда, в частности, следует, что последовательность  $(x_n)_{n=1}^\infty$  принадлежит классу  $S$  и, с учетом (9) и (10), что для нее выполняется требуемое условие (4).

2. Пусть теперь  $l \in [0, +\infty)$ . Без ограничения общности считаем, что

$$\lim y_{n_k} (y_{n_k+1} - y_{n_k}) = l; \quad (11)$$

$$\sqrt{y_{n_{k+1}}} > \sqrt{y_{n_k}} + y_{n_k} (y_{n_k+1} - y_{n_k}) + 1 \quad (12)$$

при всех  $k \in N$ .

Положим  $x_{n_k} := \sqrt{y_{n_k}}$  и  $x_{n_{k+1}} := \sqrt{y_{n_k}} + y_{n_k} (y_{n_k+1} - y_{n_k})$ ,  $k \in N$ . Ясно, что  $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$ , а из (12) следует, что  $x_{n_{k+1}} + 1 \leq x_{n_{k+1}}$ ,  $k \in N$ . Поэтому последовательность  $x = (x_{n_k}, x_{n_{k+1}})_{k=1}^\infty$  принадлежит  $S$ . Далее, используя определение членов  $x$  и условие (11), получим

$$\lim \frac{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}}{y_{n_{k+1}} - y_{n_k}} = \lim y_{n_k} = +\infty; \quad \lim \frac{x_{n_k}}{y_{n_k}} = \lim \frac{1}{\sqrt{y_{n_k}}} = 0;$$

$$\lim \frac{x_{n_{k+1}}}{y_{n_{k+1}}} = \lim \frac{\sqrt{y_{n_k}}}{y_{n_{k+1}}} + \lim \frac{y_{n_k} (y_{n_k+1} - y_{n_k})}{y_{n_{k+1}}} = 0. \text{ Оста-}$$

ется дополнить  $x$  на местах пропущенных членов точно так же, как в предыдущем случае, чтобы установить, что и в рассматриваемой ситуации дополненная последовательность  $x$  удовлетворяет условию (4).

**Замечание.** Таким образом, полученные выше результаты показывают, что ослабленный (полный) вариант обращения теоремы Штольца о верхних пределах при фиксированной последовательности  $y \in S$  справедлив на классе  $\omega^+$  или, что равносильно, на его подклассе  $S$  в том и только в том случае, когда  $\beta_y < 1$  (соответственно, когда  $y$  – быстросрастающая последовательность).

### Обращение теоремы Штольца на классе выпуклых последовательностей

В приложениях (например, в теории Данжуа – Карлемана пространств бесконечно дифференцируемых функций и в теории Румье – Коматсу ультрараспределений; см. по этому поводу [4–7]) важную роль играют выпуклые последовательности. В связи с этим представляет интерес вопрос о том, допускают ли наши предыдущие результаты (предложения 1 и 3) уточнение при условии, что мы ограничим рассмотрение выпуклыми последовательностями. Напомним, что последовательность  $x (x_n)_{n=1}^\infty$  называется выпуклой, если  $2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$  при всех  $n \geq 2$ . Обозначим через  $S^*$  подкласс выпуклых последовательностей из  $S$ . Отметим, что для последовательностей  $x \in S^*$  предел  $\lim \frac{x_n}{n}$ , конечный или бесконечный, всегда существует и равен пределу  $\lim (x_{n+1} - x_n)$ . Поэтому, в свете исследуемой задачи, имеет смысл ограничиться изучением тех последовательностей  $x \in S^*$ , для которых  $\lim \frac{x_n}{n} = +\infty$ . В дальнейшем нам потребуется

также более широкий класс  $S'$  необязательно выпуклых последовательностей  $x \in S$ , удовлетворяющих тому же условию. Введем следующую характеристику последовательности  $y \in S'$ :

$b_y := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \cdot \inf_{m > n} \frac{y_m}{m - n}$ . Заметим, что так как  $\frac{1}{y_{n+1} - y_n} \cdot \inf_{m > n} \frac{y_m}{m - n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_{n+1} - y_n} = \frac{1}{1 - y_n / y_{n+1}}$ , то  $b_y \leq \frac{1}{1 - \beta_y}$ . Кроме того, так как  $\frac{y_m}{m} \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ , то инфимум, фигурирующий в определении  $b_y$ , при каждом  $n$  достигается на некотором номере  $m(n) \geq n$ .

Справедлив следующий результат.

**Предложение 5.** Пусть  $y \in S'$  такова, что  $b_y < +\infty$ . Тогда для любой последовательности  $x \in S^*$  имеет место неравенство

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq b_y \cdot \limsup \frac{x_n}{y_n}. \quad (13)$$

**Доказательство.** В самом деле, для каждого  $n$  найдём такое  $m(n) > n$ , что  $\inf_{m > n} \frac{y_m}{m - n} = \frac{y_{m(n)}}{m(n) - n}$ . Из выпуклости  $x$  следует, что  $x_{n+1} - x_n \leq \frac{x_{m(n)} - x_n}{m(n) - n}$ .

Используя это неравенство, получим

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &\leq \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \cdot \frac{x_{m(n)} - x_n}{m(n) - n} \leq \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \cdot \frac{x_{m(n)}}{m(n) - n} = \\ &= \frac{x_{m(n)}}{y_{m(n)}} \cdot \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \cdot \frac{y_{m(n)}}{m(n) - n} = \\ &= \frac{x_{m(n)}}{y_{m(n)}} \cdot \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \cdot \inf_{m > n} \frac{y_m}{m - n}. \end{aligned}$$

Переходя здесь к верхнему пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем требуемое.

**Следствие 3.** Пусть  $y \in S'$  такова, что  $b_y = 1$ . Тогда для любой последовательности  $x \in S^*$  имеет место равенство  $\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \limsup \frac{x_n}{y_n}$ , т.е.

для такой последовательности  $y$  на классе  $S^*$  справедливо полное обращение теоремы Штольца в отношении верхних пределов.

Покажем, что оценка (13) точна на классе  $S^*$  при условии, что эталонная последовательность  $y$  выпукла.

**Предложение 6.** Пусть  $y \in S^*$  такова, что  $b_y < +\infty$ . Тогда имеется такая последовательность  $x \in S^*$ , для которой имеет место равенство

$$\limsup \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = b_y \cdot \limsup \frac{x_n}{y_n}. \quad (14)$$

**Доказательство.** Рассмотрим конструкцию  $x$ , аналогичную использованной в доказательстве предложения 2. Положим

$$x_1 := 1 \text{ и } x_{n+1} := \prod_{s=1}^n \left( b_y \cdot \frac{y_{s+1} - y_s}{y_s} + 1 \right), \quad n \geq 1. \quad (15)$$

Очевидно, что  $(x_n)_{n=1}^\infty$  возрастает. Так как  $b_y \geq 1$ ,  $x_{n+1} \geq \prod_{s=1}^n \left( \frac{y_{s+1} - y_s}{y_s} + 1 \right) = \frac{y_{n+1}}{y_1}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому  $x \in S'$ . Заметим также, что  $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = b_y \cdot \frac{x_n}{y_n}$ ,

откуда следует (14). Остается проверить, что последовательность  $x$  выпукла. На основании формулы (15)

$$x_{n+1} - x_n = b_y \cdot \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n} \cdot x_n;$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \left( b_y \cdot \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n} + 1 \right) \cdot b_y \cdot \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{y_{n+1}} \cdot x_n \geq \\ &\geq \left( \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n} + 1 \right) \cdot b_y \cdot \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{y_{n+1}} \cdot x_n = b_y \cdot \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{y_n} \cdot x_n. \end{aligned}$$

Воспользовавшись выпуклостью последовательности  $y$  и продолжив последнюю оценку, заключаем, что  $x_{n+2} - x_{n+1} \geq b_y \cdot \frac{(y_{n+2} - y_{n+1})}{y_n} \cdot x_n = x_{n+1} - x_n$ , и доказательство закончено.

Следующие два примера посвящены сравнению оценок, полученных в предложениях 5 и 1 для  $y \in S'$ . Как уже отмечалось выше, оценка (13) не хуже, чем (1), поскольку всегда  $b_y \leq \frac{1}{1 - \beta_y}$ . Вопрос состоит в том, может ли она быть более точной для каких-либо  $y$ .

**Пример 1.** Рассмотрим последовательность  $y = (e^{n/2})_{n=1}^{\infty}$ . Она принадлежит  $S^* \subset S'$ , и для нее  $\beta_y = \frac{1}{\sqrt{e}}$ . Учитывая, что функция  $\frac{1}{x} \cdot e^{x/2}$  достигает в точке  $x=2$  глобального минимума на луче  $(0, +\infty)$ , получим

$$b_y = \limsup \frac{1}{e^{n/2} \cdot (\sqrt{e} - 1)} \cdot \min_{k \geq 1} \frac{e^{(n+k)/2}}{k} = \frac{e}{2 \cdot (\sqrt{e} - 1)}.$$

$$\text{Значит, } b_y = \frac{e}{2 \cdot (\sqrt{e} - 1)} < \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} = \frac{1}{1 - \beta_y}.$$

Таким образом, оценка (13) в данном случае точнее, чем (1).

**Пример 2.** Рассмотрим последовательность  $y = (n^\alpha)_{n=1}^{\infty}$ . Она принадлежит  $S^* \subset S'$ , и для нее  $b_y = 1$ . В то же время

$$\begin{aligned} \limsup \frac{1}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} \cdot \min_{k \geq 1} \frac{(n+k)^\alpha}{k} &\leq \\ &\leq \limsup \frac{2^\alpha \cdot n^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha} = \frac{2^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае предложение 1 неприменимо, а предложение 5 обеспечивает ослабленный вариант справедливости на классе  $S^*$  обращения теоремы Штольца

для верхних пределов. В заключение отметим, что приведенные результаты тривиальным образом переформулируются для нижних пределов, если вместо того, чтобы фиксировать  $y$ , брать в качестве эталона последовательность  $x$ .

## Литература

1. Братищев А.В. Базисы Кете, целые функции и их приложения : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ростов н/Д., 1998. 248 с.
2. Брайчев Г.Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. М., 2005. 232 с.
3. Abanin A.V., Pham Trong Tien. Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // arXiv: 1505.04350v1. 2015. 27 p.
4. Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., 1955. 268 с.
5. Roumieu C. Sur quelques extensions de la notion de distribution // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 Sér. 1960. Vol. 77, № 1. P. 41–121.
6. Komatsu H. Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math. 1973. Vol. 20, № 1. P. 25–105.
7. Абанин А.В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. М., 2007. 222 с.

## References

1. Bratishchev A.V. *Bazisy Kete, tselye funktsii i ikh prilozheniya* : dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk [Kete bases, entire functions and their applications]. Rostov-on-Don, 1998, 248 p.
2. Braichev G.G. *Vvedenie v teoriyu rosta vypuklykh i tselykh funktsii* [Introduction to the theory of the growth of convex and entire functions]. Moscow, 2005, 232 p.
3. Abanin A.V., Pham Trong Tien. Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions. *arXiv: 1505.04350v1*, 2015, 27 p.
4. Mandel'broit S. *Primykayushchie ryady. Regul'yari-zatsiya posledovatel'nostei. Primeneniya* [Adjacent rows. Regularization sequences. Applications]. Moscow, 1955, 268 p.
5. Roumieu C. Sur quelques extensions de la notion de distribution. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 Sér.* 1960, vol. 77, no 1, pp. 41-121.
6. Komatsu H. Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, Math.* 1973, vol. 20, no 1, pp. 25-105.
7. Abanin A.V. *Ul'tradifferentsiruemye funktsii i ul'traraspredeleniya* [Ultra differentiable functions and ultra distribution]. Moscow, 2007, 222 p.

УДК 519.1

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-10-16

## ПОЛНЫЕ ДВУХРЕСУРСНЫЕ СЕТИ С ПЕТЛЯМИ

© 2016 г. Х. Абдулрахман, В.А. Скороходов

Скороходов Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: pdvaskor@yandex.ru

Skorokhodov Vladimir Aleksandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: pdvaskor@yandex.ru

Абдулрахман Хайдар – аспирант, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: abdulrahm.haidar@gmail.com

Abdulrahman Haidar – Post-Graduate Student, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: abdulrahm.haidar@gmail.com

Рассмотрена модель распределения двух ресурсов в однородных несимметричных двусторонних полных ресурсных сетях с петлями. Ресурсная сеть однородна, если все пропускные способности дуги равны: полная, если любые две вершины соединены с противоположными дугами, и симметричная, если в каждой паре противоположных дуг пропускные способности одинаковы. Рассмотрены два вида распределения ресурсов: 1-й – для каждой дуги указана одна пропускная способность, 2-й – две. Для каждого вида распределения разработаны методы нахождения предельного состояния для произвольной величины суммарного ресурса и порогового значения ресурсной сети.

**Ключевые слова:** ресурсная сеть, потоки в сетях, распределение потока, двухресурсная сеть, предельное состояние, пороговое значение.

We consider the model of distribution of resources in the homogeneous and asymmetrical bilateral complete resource network with loops. Resource network called complete if any two vertices are connected with opposite arcs, it is called symmetric if for each pair of opposite arcs capacities are the same. We consider two kinds of resource distribution: first, if each arc contains one capacity; second, if each arc contains two capacities. The methods for finding of limit state for arbitrary total value the resource and of threshold of resource network are developed for each type of distribution.

**Keywords:** resource network, flows in networks, flow distribution, biresource network, limit state, threshold.

Ресурсные сети являются потоковой моделью, предложенной в работах О.П. Кузнецова и Л.Ю. Жилияковой [1–5]. В [1] предложена модель распределения ресурса в однородных полных сетях без петель. В [2] исследованы свойства однородных и несимметричных двусторонних полных сетей с петлями; доказаны теоремы о существовании предельного состояния  $\mathbf{Q}^*$  и порогового значения  $T$  суммарного ресурса. В [3–5] исследованы процессы стабилизации потоков в несимметричных ресурсных сетях.

В настоящей работе рассмотрена модель распределения двух ресурсов в однородных и несимметричных двусторонних полных сетях с петлями. Основной задачей работы является разработка метода нахождения порогового значения  $T$  и предельного состояния  $\mathbf{Q}^*$  для произвольных величин суммарных ресурсов.

## Основные определения

Ресурсной сетью будем называть ориентированный граф, вершинам  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) которого приписаны неотрицательные числа  $q_i(t) \geq 0$ , изменяющиеся в дискретном времени и называемые ресурсами, а ребрам  $(v_i; v_j)$  – положительные числа  $r_{ij}$ , постоянные во времени и называемые их пропускными способностями. Состоянием сети в момент времени  $t$  ( $\geq 0$ ) будем называть вектор-функцию  $\mathbf{Q}(t) = (q_1(t); \dots; q_n(t))$ . Состояние  $\mathbf{Q}(0)$  называется начальным распределением ресурса в сети.

Правила перераспределения ресурса (правила функционирования сети):

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{j=1}^n F_{ij}(t) + \sum_{j=1}^n F_{ji}(t) \quad \forall i \in [1; n]_{\mathbb{Z}},$$



где  $F_{ij}(t)$  – величины ресурсного потока, проходящего по дуге  $(v_i; v_j)$  в момент времени  $t$ , – определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} - F_{ij}(t) &= r_{ij}, \text{ если } q_i(t) \geq \sum_{k=1}^n r_{ik}; \\ - F_{ij}(t) &= \frac{r_{ij}}{\sum_{k=1}^n r_{ik}} \cdot q_i(t), \text{ если } q_i(t) < \sum_{k=1}^n r_{ik}. \end{aligned}$$

Ресурсная сеть называется однородной, если все пропускные способности равны (обозначим их через  $r$ ).

Пару ребер  $(v_i; v_j)$ ,  $(v_j; v_i)$  назовем двусторонней парой. Сеть, вершины которой соединены только двусторонними парами, назовем двусторонней сетью.

Двусторонняя сеть называется полной, если любые две вершины соединены двусторонней парой, и симметричной, если в каждой двусторонней паре пропускные способности одинаковы.

Входной пропускной способностью будем называть величину  $r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$ , выходной –  $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ .

В сети выполняется закон сохранения: при её функционировании ресурс не поступает извне и не расходуется в любой момент времени.

### Однородные двусторонние полные сети с двумя ресурсами

Будем рассматривать сети с двумя ресурсами, т.е. каждой вершине  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) в момент времени  $t$  соответствует вектор  $(q_i^1(t); q_i^2(t))$ , т.е. состоянием сети в момент  $t$  будем называть вектор-функцию

$$\mathbf{Q}(t) = \left( \begin{pmatrix} q_1^1(t) \\ q_1^2(t) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q_2^1(t) \\ q_2^2(t) \end{pmatrix}; \dots; \begin{pmatrix} q_n^1(t) \\ q_n^2(t) \end{pmatrix} \right),$$

определенную на  $Z_+$ : задается вектор  $\mathbf{Q}(0)$  начального распределения ресурса в сети и указываются правила перераспределения (правила функционирования сети):

$$\begin{aligned} q_i^k(t+1) &= q_i^k(t) - \sum_{j=1}^n F_{ij}(t) + \sum_{j=1}^n F_{ji}(t) \\ \forall i \in [1; n]_Z, k &= \{1, 2\}, \end{aligned}$$

где  $F_{ij}(t)$  – величины ресурсного потока, проходящего по дуге  $(v_i; v_j)$  в момент времени  $t$ .

$F_{ij}(t) = r$  единиц (ед.) 1-го ресурса, если  $q_i^1(t) \geq n \cdot r$ ;  $F_{ij}(t) = F_1 + F_2$ , где  $F_1 = \frac{q_i^1(t)}{n}$  ед. 1-го ресурса и  $F_2 = r - \frac{q_i^1(t)}{n}$  ед. 2-го ресурса, если  $(q_i^1(t) < n \cdot r) \wedge (q_i^1(t) + q_i^2(t) \geq n \cdot r)$ ;  
 $F_{ij}(t) = \frac{q_i^1(t) + q_i^2(t)}{n}$  ед. 1-го и 2-го ресурсов, если  $q_i^1(t) + q_i^2(t) < rn$ .

В однородных двусторонних полных сетях с двумя ресурсами  $\mathbf{Q}_1(t)$ ,  $\mathbf{Q}_2(t)$  выделим свойства.

**Свойство 1.** Если для некоторого момента  $t'$  имеет место равенство  $q_i^1(t') + q_i^2(t') = q_j^1(t') + q_j^2(t')$ , то для всех  $t > t'$  справедливо равенство  $q_i^1(t) + q_i^2(t) = q_j^1(t) + q_j^2(t)$ .

Множество вершин, у которых  $q_i^1(t) \geq rn$ , будем называть зоной  $Z_1^+(t)$ ;  $q_i^1(t) < rn$ ,  $q_i^1(t) + q_i^2(t) \geq rn$  – зоной  $Z_2^+(t)$ ;  $q_i^1(t) + q_i^2(t) < rn$  – зоной  $Z^-(t)$ .

**Свойство 2.** Для всех  $t$   $\sum_{j=1}^n F_{ij}(t) = \sum_{j=1}^n F_{ji}(t)$ , где  $i, j \in [1; n]_Z$ .

**Лемма 1.** Если в момент  $t$  вершины  $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_m}$  ( $m \leq n$ ) находятся в зоне  $Z^-(t)$ , то выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) & q_{j_1}^1(t+1) = q_{j_2}^1(t+1) = \dots = q_{j_m}^1(t+1); \\ 2) & q_{j_1}^2(t+1) = q_{j_2}^2(t+1) = \dots = q_{j_m}^2(t+1); \\ 3) & q_{j_1}^1(t+1) + q_{j_1}^2(t+1) = q_{j_2}^1(t+1) + q_{j_2}^2(t+1) = \dots \\ & = q_{j_m}^1(t+1) + q_{j_m}^2(t+1). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Так как все вершины находятся в зоне  $Z^-(t)$ , то они отдадут весь свой ресурс; их ресурсы  $q^1$  и  $q^2$  в момент времени  $t+1$  равны, соответственно, поступающим в них потокам ресурсов  $q^1$  и  $q^2$  из смежных вершин. Лемма верна в силу свойства 3.

**Лемма 2.** Если в момент  $t$  вершины  $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_m}$  ( $m \leq n$ ) находятся в зоне  $Z^+(t)$ , то выполняется условие 1 леммы 1 и, вообще говоря, не выполняются условия 2 и 3.

*Доказательство.* Для любой вершины зоны  $Z_2^+(t)$  выполняются  $q^1(t) \leq rn$ , т.е. все эти вершины

находятся в зоне  $Z_2^+(t) \cup Z^-(t)$ . Таким образом, эти вершины отдают весь свой первый ресурс, и их ресурсы в момент  $t+1$  равны приходящему потоку первого ресурса. Следовательно,  $q_{j_1}^1(t+1) = q_{j_2}^1(t+1) = \dots = q_{j_m}^1(t+1)$ .

Для того чтобы доказать, что условия 2 и 3, вообще говоря, не выполняются, приведём пример.

**Пример 1.** Рассмотрим однородную двустороннюю полную ресурсную сеть с множеством вершин  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$  и пропускной способностью  $r = 2$ . Пусть  $\mathbf{Q}(0)$  такое, что

$$\mathbf{Q}_1(0) = (18; 16; 7; 6; 6; 3; 5),$$

$$\mathbf{Q}_2(0) = (8; 6; 15; 12; 2; 4; 1).$$

Определим множества  $Z_1^+(0) = \{v_1, v_2\}$ ,  $Z_2^+(0) = \{v_3, v_4\}$ . Получим величины:  $q_1^1(1) = 11,86$ ;  $q_2^1(1) = 9,86$ ;  $q_1^2(1) = 11,14$ ;  $q_2^2(1) = 9,14$ ;  $q_3^1(1) = q_4^1(1) = q_5^1(1) = q_6^1(1) = q_7^1(1) = 7,86$ ;  $q_3^2(1) = 11,14$ ;  $q_4^2(1) = 7,14$ ;  $q_5^2(1) = q_6^2(1) = q_7^2(1) = 3,14$ .

Следовательно,  $q_3^1(1) + q_3^2(1) \neq q_4^1(1) + q_4^2(1)$ , поскольку  $q_3^1(1) = q_4^1(1)$  и  $q_3^2(1) \neq q_4^2(1)$ . Таким образом, показано, что условия 2 и 3 леммы 2 для приведённой сети не выполняются.

Пусть суммарные величины 1-го и 2-го ресурсов соответственно равны  $W_1 = \sum_{i=1}^n q_i^1(t)$  и  $W_2 = \sum_{i=1}^n q_i^2(t)$ .

**Теорема 1.** Для однородной двусторонней полной сети с двумя ресурсами и для любого суммарного ресурса  $W = W_1 + W_2$  имеют место утверждения:

1) если  $W \leq rn^2$ , то при любом начальном состоянии  $\mathbf{Q}(0)$  его предельным состоянием являются векторы  $\mathbf{W}_1 = (\frac{W_1}{n}; \frac{W_1}{n}; \dots; \frac{W_1}{n})$ ,

$$\mathbf{W}_2 = (\frac{W_2}{n}; \frac{W_2}{n}; \dots; \frac{W_2}{n});$$

$$\mathbf{W}_2 = (\frac{W_2}{n}; \frac{W_2}{n}; \dots; \frac{W_2}{n});$$

2) если  $W > rn^2$ , то при любом начальном состоянии  $\mathbf{Q}(0)$  сети, в котором хотя бы в двух вершинах ресурсы не равны, выравнивание не происходит, т.е. в предельном состоянии  $\mathbf{Q}^*$  также не во всех вершинах ресурсы будут равны. Здесь имеем два случая:

I) если  $W_1 \leq rn^2$ , то выравнивается первый ресурс и не выравнивается второй ресурс;

II) если  $W_1 > rn^2$ , то оба ресурса не выравниваются.

*Доказательство.* Пусть  $W \leq rn^2$ . Если зона  $Z^+(0)$  пуста, то все вершины находятся в зоне  $Z^-(0)$ ; тогда в момент  $t = 1$  ресурсы  $q_i^1$  и  $q_i^2$  равны в силу леммы 1, т.е. выравнивание происходит за один такт.

Если зона  $Z^+(0)$  не пуста, то имеем два случая: существует вершина  $i$  такая, что либо  $\begin{cases} q_i^1(0) < rn; \\ q_i^1(0) + q_i^2(0) > rn. \end{cases}$ , либо  $q_i^1(0) > rn$ .

В первом случае  $Z_1^+(0) = \emptyset$  (так как  $q_i^1(0) < rn$ ), т.е. первый ресурс выравнивается за один шаг в силу леммы 1.

Во втором случае первый ресурс выравнивается [2, теорема 1], значит, на некотором шаге  $t^*$  зона  $Z_1^+(t^*) = \emptyset$ . Осталось показать, что второй ресурс тоже выравнивается.

Для этого рассмотрим зону  $Z_2^+(t)$ .

Если  $Z_2^+(t) = \emptyset$ , то все вершины находятся в зоне  $Z^-(t)$ , т.е. по лемме 1 первый и второй ресурсы выравниваются.

Если  $Z_2^+(t) \neq \emptyset$ , то существует такая вершина  $i$ , что  $q_i^1(0) + q_i^2(0) > rn$  и  $q_i^1(0) \leq rn$ , а поскольку  $W \leq rn^2$ , то существует момент  $t_1$  такой, что  $Z_1^+(t_1) = \emptyset$  и  $Z_2^+(t_1) = \emptyset$ . Последнее означает, что все вершины переходят в зону  $Z^-(t_1)$ . Отсюда следует, что второй ресурс выравнивается.

Рассмотрим пункт 2 ( $W > rn^2$ ).

Для варианта I ( $W_1 \leq rn^2$ ) первый ресурс выравнивается, и поскольку для любого момента времени  $t$  справедливо  $Z_2^+(t) \neq \emptyset$  (так как  $W > rn^2$ ), то выравнивание второго ресурса не происходит.

Для варианта II ( $W_1 > rn^2$ ) первый ресурс не выравнивается [2, теорема 1]. Отсюда следует, что и второй ресурс тоже не выравнивается.

Теорема доказана.

### Несимметричные двусторонние полные сети с петлями

Ресурсная сеть называется квазисимметричной, если

$$\forall i \quad r_i^{in} = r_i^{out}. \quad (1)$$

Сеть будем называть несимметричной, если она не удовлетворяет условию квазисимметричности (1), т.е. существуют по крайней мере две вершины, для которых  $|r_i^{in} - r_i^{out}| > 0$ .

Пусть  $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out}$ , тогда все вершины сети можно разделить на три типа: вершины-приемники, для которых  $\Delta r_i > 0$ ; вершины-источники, для которых  $\Delta r_i < 0$ ; нейтральные вершины, для которых  $\Delta r_i = 0$ .

Пусть  $n, l, k$  – количество вершин, приемников, источников. Будем считать, что вершины с номерами от 1 до  $l$  – это приемники, от  $l+1$  до  $l+k$  – источники, от  $l+k+1$  до  $n$  – нейтральные.

*Несимметричные двусторонние полные сети с петлями и одним ресурсом.* Пусть в несимметричной двусторонней полной (НДП) сети вектор состояния в момент  $t$   $\mathbf{Q}(t) = (q_1(t); q_2(t); \dots; q_n(t))$ . Обозначим через  $\mathbf{Q}^*(t) = (q_1^*; q_2^*; \dots; q_n^*)$  вектор предельного состояния. Определим для каждой вершины  $v_i$  входную  $r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$  и выходную

$r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$  пропускные способности.

Введём обозначения:  $Z^-(t)$  – множество вершин, для которых  $q_i(t) < r_i^{out}$ ;  $Z^+(t)$  – множество вершин, для которых  $q_i(t) \geq r_i^{out}$ .

Правила распределения ресурса: в момент  $t+1$  вершина  $v_i$  отдаёт в смежную ей вершину  $v_j$   $r_{ij}$  ед. ресурса, если  $q_i(t) > r_i^{out}$ ;  $\frac{r_{ij}}{r_i^{out}} q_i(t)$  – в противном случае (правило 2).

Следуя работе [4], обозначим через  $T$  пороговое значение ресурса, такое что при  $W \leq T$  все вершины, начиная с некоторого момента времени  $t'$ , переходят в зону  $Z^-(t)$ .

Рассмотрим задачу нахождения величины  $T$ . Для этого определим величину  $\rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_i^{out}}$  – долю приходящего в вершину  $v_i$  потока, проходящего по дуге  $(v_i, v_j)$ . Для предельного состояния  $\mathbf{Q}^*$  обозначим через  $q_{ij}^*$  часть ресурса  $q_i^*$ , проходящего по дуге  $(v_i, v_j)$ . Для величин  $\rho_{ij}$  и  $q_{ij}^*$  справедливы соотношения

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \rho_{ij} = 1; \\ \sum_{j=1}^n q_{ij}^* = \sum_{j=1}^n q_{ji}^*; \\ 0 \leq q_{ij}^* \leq r_{ij}. \end{cases} \quad (2)$$

Для нахождения величины  $T$  воспользуемся методом определения максимального потока в сети с условиями распределения (см. [6]); для этого построим систему линейных алгебраических уравнений в три шага.

*Шаг 1.* Для каждой вершины  $v_i$  ( $i \in [1; n]_Z$ ) составим уравнения относительно неизвестных  $q_{ij}^*$ .

$$\rho_{ij} \sum_{k=1}^n q_{ik}^* - q_{ij}^* = 0, \quad j \in [1; n]_Z. \quad (3)$$

*Шаг 2.* К уравнениям системы (3) для каждой вершины  $v_i$  ( $i \in [1; n]_Z$ ) добавим уравнения, полученные из (2) (величины  $x_i$  также являются неизвестными):

$$\begin{cases} x_i = \sum_{k=1}^n q_{ik}^*, \\ x_i = \sum_{k=1}^n q_{ki}^*. \end{cases} \quad (4)$$

Объединяя (3) и (4), получим систему

$$\begin{cases} q_{ij}^* = \rho_{ij} x_i, \\ x_i = \sum_{k=1}^n q_{ik}^*, \quad i, j \in [1; n]_Z, \\ x_i = \sum_{k=1}^n q_{ki}^*. \end{cases} \quad (5)$$

*Шаг 3.* К уравнениям системы (5) добавляем еще одно уравнение  $q_{yz}^* = r_{yz}$ , где  $y, z$  – некоторые значения из  $[1; n]_Z$ .

Если просуммировать все уравнения первой строки (5), соответствующие вершине  $v_i$ , получим

$$\sum_{j=1}^n q_{ij}^* = \sum_{j=1}^n \rho_{ij} x_i, \text{ т.е. } \sum_{j=1}^n q_{ij}^* = x_i.$$

Таким образом, поскольку все уравнения второй строки (5) являются линейными комбинациями уравнений первой строки (5), получаем систему

$$\begin{cases} q_{ij}^* = \rho_{ij} x_i, \\ x_i = \sum_{k=1}^n q_{ki}^*, \quad i, j \in [1; n]_Z, \\ q_{yz}^* = r_{yz}. \end{cases} \quad (6)$$

Решая систему (6), получим величины  $q_{ij}^*$  и  $x_i$  ( $i, j \in [1; n]_Z$ ). Если хотя бы для одной из величин  $q_{ij}^*$  не выполняется неравенство в условии (2), то заменим последнее уравнение  $q_{yz}^* = r_{yz}$  на аналогичное относительно других значений  $y$  и  $z$  (для которых не выполняется неравенство в условии (2)), затем снова решаем систему вида (6).

В итоге, когда решение системы вида (6) удовлетворяет условию (2), пороговое значение может быть найдено как сумма всех величин  $x_i$ :  $T = \sum_{i=1}^n x_i$ .

Таким образом, имеет место теорема.

**Теорема 2.** Для ресурсной сети с пороговым значением  $T$ :

1) если  $W \leq T$ , то для всех вершин  $q_i^* = \frac{W}{T} x_i$ ,

т.е. вектор предельного состояния имеет вид

$$\mathbf{Q}^* = \left( \frac{W}{T} x_1; \frac{W}{T} x_2; \dots; \frac{W}{T} x_n \right);$$

2) если  $W > T$ , то для всех источников и нейтральных вершин  $q_i^* = x_i$ .

**Пример 2.** Рассмотрим ресурсную сеть, предложенную в [5, пример 1]. Здесь матрица пропускных способностей  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ , суммарный ре-

сурс  $W = 1$ ; начальное состояние  $\mathbf{Q}(0) = (1; 0; 0)$ .

Покажем, что пороговое значение  $T = 12$ . Для этого построим систему вида (6) и возьмём  $q_{yz}^* = r_{11} = 1$ .

Решая эту систему, найдём решение, удовлетворяющее условию (2).

$$q_{11}^* = 1, \quad q_{12}^* = 1, \quad q_{13}^* = 1, \quad q_{21}^* = 0,428, \quad q_{22}^* = 1,714, \\ q_{23}^* = 2,143, \quad q_{31}^* = 1,571, \quad q_{32}^* = 1,571, \quad q_{33}^* = 1,571, \\ x_1 = 3, \quad x_2 = 4,286, \quad x_3 = 4,714.$$

Таким образом, пороговое значение  $T = x_1 + x_2 + x_3 = 12$ . По теореме 2 предельное состояние  $\mathbf{Q}^*$  имеет вид

$$\mathbf{Q}^* = \left( \frac{W}{T} x_1; \frac{W}{T} x_2; \frac{W}{T} x_3 \right) = (0,25; 0,357; 0,393).$$

*Несимметричные двусторонние полные сети с петлями и двумя ресурсами.* В несимметричных двусторонних полных сетях с петлями и двумя ресурсами  $\mathbf{Q}_1(t)$ ,  $\mathbf{Q}_2(t)$  выделим свойства.

**Свойство 1.** Если для всех  $i > l$  и некоторого момента времени  $t'$  выполняется неравенство  $q_i^1(t') + q_i^2(t') \leq r_i^{in}$ , то для всех  $t > t'$  будет выполняться  $q_i^1(t) + q_i^2(t) \leq r_i^{in}$ .

*Доказательство.* Так как  $i > l$ , то все вершины – источники и нейтральные, т.е.  $\Delta r_i = r_i^{in} - r_i^{out} \leq 0$ . Значит  $q_i^1(t') + q_i^2(t') \leq r_i^{in} \leq r_i^{out}$ . Отсюда следует, что  $v_i \in Z^-(t')$  и она всегда отдаёт весь первый ресурс, а второго не хватает, чтобы она вышла из  $Z^-$ . Поэтому  $\forall t > t', \quad q_i^1(t) + q_i^2(t) \leq r_i^{in}$ , где  $i > l$ .

**Свойство 2.** Если для вершин  $v_i, v_j$  ( $i, j > l$ ) в некоторый момент времени  $t'$  имеет место равенство  $q_i^1(t') + q_i^2(t') = q_j^1(t') + q_j^2(t')$ , и при этом для любого  $m$   $r_{mi} = r_{mj}$  и

$$\begin{cases} q_i^1(t') + q_i^2(t') \leq r_i^{out} \\ q_j^1(t') + q_j^2(t') \leq r_j^{out} \end{cases}, \quad (7)$$

то для всех  $t > t'$  выполняется  $q_i^1(t) + q_i^2(t) = q_j^1(t) + q_j^2(t)$ .

*Доказательство.* Из соотношений (7) следует, что в момент  $t'$  вершины  $v_i, v_j \in Z^-$ , поэтому они отдают весь свой ресурс  $q_i^1(t') + q_i^2(t')$  и получают одинаковый ресурс. Таким образом, их ресурс в момент  $t'+1$  равен поступающему к ним входному потоку  $f_i^{in}(t') = f_j^{in}(t') = q_i^1(t') + q_i^2(t')$ , тогда свойство 2 верно в силу свойства 1.

В момент  $t+1$  вершина  $v_i$  отдаёт в ребро  $v_j$   $r_{ij}$  первого ресурса, если  $q_i^1(t) \geq r_i^{out}$ ;  $\frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}}$  первого

ресурса и  $r_{ij} - \frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}}$  второго ресурса, если выпол-

няется условие  $\begin{cases} q_i^1(t) < r_i^{out}, \\ q_i^1(t) + q_i^2(t) \geq r_i^{out} \end{cases}$ ;  $r_{ij} \frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}}$  перво-

го ресурса и  $r_{ij} \frac{q_i^2(t)}{r_i^{out}}$  второго ресурса, если  $q_i^1(t) + q_i^2(t) < r_i^{out}$ .

**Теорема 3.** В НДП-сети с петлями для любого начального состояния и для любого суммарного ресурса  $W = \sum_{i=1}^n (q_i^1(t) + q_i^2(t))$  существует такой момент времени  $t'$ , что

$$\forall t > t' \quad q_i^1(t) + q_i^2(t) < r_i^{in}, \quad i > l. \quad (8)$$

*Доказательство.* Так как  $i > l$ , то все вершины либо источники, либо нейтральные. Если все вершины находятся в зоне  $Z^-$ , то из свойства (4) следует, что неравенство (8) выполняется.

1. Для вершин-источников ( $i \in [l+1; l+k]_Z$ ) выполняется неравенство  $r_i^{in} < r_i^{out}$ .

Если для вершины-источника  $v_m$ ,  $q_m^1(0) > r_m^{out}$ , т.е.  $v_m \in Z_1^+$  и вершина  $v_m$  отдаёт за каждый такт по  $r_m^{out}$  первого ресурса, но  $r_m^{in} < r_m^{out}$ ; поэтому за каждый такт её первый ресурс уменьшается, и в некоторый момент времени  $t_1$  вершина  $v_m$  перейдет в зону  $Z_2^+$  или  $Z^-$ .

Если  $v_m$  перейдет в зону  $Z_2^+$ , то  $q_m^1(t_1) < r_m^{out}$  и  $q_m^1(t_1) + q_m^2(t_1) \geq r_m^{out}$ , но вершина  $v_m$  – источник, поэтому она отдаёт ресурса больше, чем получает, и после конечного числа шагов  $v_m$  перейдет в зону  $Z^-$ , т.е. в общем случае  $v_m \in Z^-$  в момент  $t'$ . Следовательно,  $q_m^1(t') + q_m^2(t') < r_m^{out}$ ,  $v_m$  всегда отдаёт весь первый ресурс, а второго не хватает, чтобы она вышла из  $Z^-$ , т.е. существует момент  $t'$  такой, что для всех  $t > t'$  выполнено  $q_m^1(t) + q_m^2(t) < r_m^{in}$ .

2. Пусть  $v_m$  – нейтральная вершина, т.е.  $r_m^{in} = r_m^{out}$ .

Если  $v_m \in Z_1^+$ , то  $q_m^1(t) > r_m^{out}$ , поэтому  $v_m$  отдаёт  $r_m^{out}$ , получает  $r_m^{in}$  – одинаковые величины. В некоторый момент времени  $t_1$  вершины-источники перейдут в  $Z^-$ , следовательно, из вершин-источников  $v_m$  будет получать первый ресурс, суммарной величины меньшей, чем  $r_m^{in}$  (поскольку вершины-источники  $v_i \in Z^-$  и  $r_i^{in} < r_i^{out}$ ). Отсюда получим, что величина первого ресурса, поступающего в  $v_m$ , уменьшается, следовательно,  $v_m$  перейдет в зону  $Z_2^+$ , и затем в некоторый момент времени  $t'$   $v_m$  перейдет в зону  $Z^-$  и останется там. Таким образом, существует момент времени  $t'$  такой, что  $\forall t > t'$   $q_m^1(t) + q_m^2(t) < r_m^{out} = r_m^{in}$ , т.е. неравенство (8) выполнено.

*НДП-сети с петлями, двумя ресурсами и двумя пропускными способностями.* В НДП-сети с петлями и с двумя ресурсами положим, что пропускная способность разделена на две части:  $r_{ij}^1, r_{ij}^2$ .

При этом второй ресурс, проходящий по дуге  $(v_i, v_j)$ , не может превышать величину  $r_{ij}^2$ .

Будем называть первой и второй входной пропускной способностью вершины  $v_i$  соответственно величины  $r_i^{1in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}^1$  и  $r_i^{2in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}^2$ , а первой и второй выходной пропускной способностью вершины  $v_i$  –  $r_i^{1out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}^1$ ,  $r_i^{2out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}^2$ .

В момент  $t+1$  вершина  $v_i$  отдает в ребро  $v_j$ :

$r_{ij} = r_{ij}^1 + r_{ij}^2$ , если  $q_i^1(t) > r_i^{out}$ ;  $r_{ij} \frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}}$  первого ресурса и  $\min(r_{ij}^2, r_{ij} - r_{ij} \frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}})$  второго ресурса, если

$\begin{cases} q_i^1(t) < r_i^{out} \\ q_i^1(t) + q_i^2(t) \geq r_i^{out} \end{cases}$ ;  $r_{ij} \frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}}$  первого ресурса и  $\frac{q_i^2(t)}{r_i^*} \min(r_{ij}^2, r_{ij} - r_{ij} \frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}})$  второго ресурса, если  $q_i^1(t) + q_i^2(t) < r_i^{out}$ , где  $r_{ij} = r_{ij}^1 + r_{ij}^2$ ,

$r_i^* = \sum_{j=1}^n \min(r_{ij}^2, r_{ij} - r_{ij} \frac{q_i^1(t)}{r_i^{out}})$ ,  $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ .

Пороговое значение  $T'$  – это количество первого ресурса, для которого первый и второй ресурсы распределяются независимо друг от друга. Для того чтобы найти значения  $T'$  и вектор предельного состояния  $Q^*$ , положим  $r_{ij}^{\tau} = r_{ij} - q_{ij}^{2*}$ ,  $r_{i\tau}^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}^{\tau}$ .

Таким образом, получаем НДП-сеть с петлями, одним ресурсом  $q_i^1$  и одной пропускной способностью  $r_{ij}^{\tau}$ .

Решая систему вида (6) для  $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{\tau}$ , найдём величину порогового значения первого ресурса  $T' = \sum_{i=1}^n x_i$ .

По теореме 2, если  $W_1 \leq T'$ , то для всех вершин будет  $q_i^* = \frac{W_1}{T'} x_i$ , т.е. вектор предельного состояния

$Q^* = (\frac{W_1}{T'} x_1; \frac{W_1}{T'} x_2; \dots; \frac{W_1}{T'} x_n)$ ; если  $W_1 > T'$ , то для всех источников и нейтральных вершин  $q_i^* = \frac{W_1}{T'} x_i$ .

## Литература

1. Кузнецов О.П. Однородные ресурсные сети. I. Полные графы // Автоматика и телемеханика. 2009. № 11. С. 136 – 147.

2. Кузнецов О.П., Жилиякова Л.Ю. Полные двусторонние ресурсные сети с произвольными пропускными способностями // Управление большими системами. 2010. № 30-1. С. 640 – 664.

3. Жилиякова Л.Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. С. 133 – 143.

4. Жилиякова Л.Ю. Несимметричные ресурсные сети. II. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация // Автоматика и телемеханика. 2012. № 6. С. 103 – 118.

5. Жилиякова Л.Ю. Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний // Автоматика и телемеханика. 2012. № 7. С. 67 – 77.

6. Скороходов В.А., Чеботарева А.С. Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22, № 3. С. 55 – 74.

## References

1. Kuznetsov O.P. Odnorodnye resursnyye seti. I. Polnye grafy [Uniform resource network. I. Complete

graphs]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2009, no 11, pp. 136-147.

2. Kuznetsov O.P., Zhilyakova L.Yu. Polnye dvustoronnie resursnyye seti s proizvol'nymi propusknyimi sposobnostyami [Full bilateral resource network with arbitrary bandwidths]. *Upravlenie bol'shimi sistemami*, 2010, no 30-1, pp. 640-664.

3. Zhilyakova L.Yu. Nesimmetrichnyye resursnyye seti. I. Protsessy stabilizatsii pri malykh resursakh [Asymmetric resource network. I. The process of stabilization at low resource]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2011, no 4, pp. 133-143.

4. Zhilyakova L.Yu. Nesimmetrichnyye resursnyye seti. II. Potoki pri bol'shikh resursakh i ikh stabilizatsiya [Asymmetric resource network. II. Flows for large resources and their stabilization]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2012, no 6, pp. 103-118.

5. Zhilyakova L.Yu. Nesimmetrichnyye resursnyye seti. III. Issledovanie predel'nykh sostoyanii [Asymmetric resource network. III. Study of limit states]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2012, no 7, pp. 67-77.

6. Skorokhodov V.A., Chebotareva A.S. Zadacha o maksimal'nom potoke v seti s osobymi usloviyami raspredeleniya potoka [Maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution]. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii*, 2015, vol. 22, no 3, pp. 55-74.

УДК 517.9

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-17-21

## ОПЕРАТОРЫ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВЕРТКИ, СОДЕРЖАЩИЕ ОПЕРАТОР КОМПЛЕКСНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

© 2016 г. О.Г. Авсянкин, А.М. Ковальчук

Авсянкин Олег Геннадиевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: avsyanki@math.sfedu.ru

Avsyankin Oleg Gennadievich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Head of the Department of Differential and Integral Equations, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: avsyanki@math.sfedu.ru

Ковальчук Алиса Марковна – магистр, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: Alica759@mail.ru

Koval'chuk Alisa Markovna – Post-Graduate Student, Department of Differential and Integral Equations, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: Alica759@mail.ru

Рассматриваются операторы мультипликативной дискретной свертки, в состав которых входит оператор комплексного сопряжения, являющийся инволютивным. Исследование таких операторов в  $\ell_p$ -пространствах осуществляется с помощью метода, разработанного Н.К. Карапетянцем и С.Г. Самко для абстрактных уравнений с инволютивным оператором. В рамках этого метода для рассматриваемых операторов мультипликативной дискретной свертки определен символ, в терминах которого получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для вычисления индекса. Также отмечены некоторые важные частные случаи.

**Ключевые слова:** мультипликативная дискретная свертка, инволютивный оператор, символ, нетеровость, индекс.

We consider the multiplicative discrete convolution operators, which include the complex conjugation operator, which is involutive. The study of such operators in  $\ell_p$ -spaces is conducted by means of the method, which was developed by N.K. Karapetians and S.G. Samko for abstract equations with involutive operators. In the framework of this method, for such multiplicative discrete convolution operators the symbol is defined. In terms of this symbol the necessary and sufficient conditions for the Fredholm property and the index computation formula are obtained. Also, there have been some important special cases.

**Keywords:** multiplicative discrete convolution, involutive operator, symbol, Fredholm property, index.

В настоящее время имеется немало работ, посвященных интегральным операторам с однородными ядрами (см., например, [1–4] и цитированные в них источники). Дискретные аналоги этих операторов (их называют операторами мультипликативной дискретной свертки) исследованы значительно меньше. В отличие от континуального случая, такие операторы не сводятся к операторам свертки, и для их исследования требуются иные подходы. Впервые систематически эти операторы были изучены в работах [5, 6]. В частности, в [5] для мультипликативных дискретных сверток были получены критерий нетеровости и формула для вычисления индекса. В статье [7] построена и изучена банахова алгебра, порожденная операторами мультипликативной дискретной свертки.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [5–7]. В ней рассматриваются операторы мультипликативной дискретной свертки, содержащие оператор комплексного сопряжения, являющийся инволютивным, что позволяет применить метод, разработанный Н.К. Карапетянцем и С.Г. Самко для абстрактных уравнений с инволютивным оператором [8, гл. III]. С помощью этого метода для рассматриваемых операторов в работе получены критерий нетеровости и формула для вычисления индекса.

Ниже используются следующие обозначения:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  – множества натуральных, вещественных и комплексных чисел;  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ ;  $\mathring{\mathbb{R}}$  – компактификация  $\mathbb{R}$  одной бесконечно удаленной точкой;  $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$  – банахово пространство комплексных

последовательностей  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , таких что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^p < \infty.$$

### Предварительные сведения

Пусть  $X$  – банахово пространство. Линейный ограниченный оператор  $Q \neq \pm I$  называется инволютивным, если  $Q^2 = I$ .

Для исследования уравнений, содержащих инволютивный оператор, имеется специальный метод [8, гл. III]. Ниже мы приводим основные положения этого метода.

Предположим, что существует линейный оператор  $L$  линейных ограниченных в  $X$  операторов, удовлетворяющий аксиомам:

**Аксиома 1.** Оператор  $AB - BA$  компактен в  $X$  для любых  $A, B \in L$ .

**Аксиома 2.** Для любого оператора  $A \in L$  существует нетеров оператор  $A_1 \in L$  такой, что  $A_1Q - QA$  компактен в  $X$ .

**Аксиома 3.** Множество нетеровых операторов из  $L$  всюду плотно в  $L$ .

**Аксиома 4.** Существует нетеров оператор  $U \in L$  такой, что оператор  $UQ + QU$  компактен в  $X$ .

**Предложение 1** [8, с. 61]. Пусть  $L$  – линейный оператор в  $X$ , удовлетворяющий аксиомам 1–4, и пусть  $A, B \in L$ . Для того чтобы оператор  $C = A + QB$  был нетеров в  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы был нетеров оператор  $D = AA_1 - BB_1$ . В этом случае  $\text{ind } C = 1/2 \text{ind } D$ .

### Постановка задачи

В пространстве  $\ell_p$ ,  $1 < p < \infty$ , определим оператор  $K$  формулой

$$(K\varphi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} k(m, n)\varphi_n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где  $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , а функция  $k(x, y)$  определена на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  и удовлетворяет следующим условиям:

1° – однородность степени  $(-1)$ , т.е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-1}k(x, y), \quad \forall \alpha > 0;$$

2° – суммируемость, т.е.

$$\kappa = \int_0^{\infty} |k(1, y)| y^{-1/p} dy < \infty;$$

3° – функция  $|k(1, y)| y^{1/p}$  имеет ограниченное изменение, т.е.

$$v = \bigvee_0^{\infty} |k(1, y)| y^{1/p'} < \infty.$$

Оператор  $K$  называется оператором мультипликативной дискретной свертки. Известно [5], что он ограничен в пространстве  $\ell_p$ , причем

$$\|K\| \leq \kappa + v. \text{ Положим } \tilde{k}(\xi) = \int_0^{\infty} k(1, y) y^{-1/p+i\xi} dy, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

В работе [5] было показано, что оператор  $\lambda I + K$  нетеров тогда и только тогда, когда его символ  $\lambda + \tilde{k}(\xi)$  удовлетворяет условию

$$\lambda + \tilde{k}(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Далее, в пространстве  $\ell_p$  рассмотрим оператор

$$(C\varphi)_m = \lambda\varphi_m + \mu\bar{\varphi}_m + \sum_{n=1}^{\infty} k_1(m, n)\varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} k_2(m, n)\bar{\varphi}_n + (T\varphi)_m, \quad (3)$$

где  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ; функции  $k_1(x, y)$  и  $k_2(x, y)$  удовлетворяют условиям 1°–3°;  $T$  – компактный оператор. Здесь и далее черта означает комплексное сопряжение.

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы получить критерий нетеровости оператора  $C$  и формулу для вычисления его индекса.

Определим оператор  $Q$  формулой

$$(Q\varphi)_m = \bar{\varphi}_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что  $Q^2 = I$ . Введем еще два оператора:

$$A = \lambda I + K_1 + T, \quad (4)$$

$$B = \bar{\mu} I + \tilde{K}_2, \quad (5)$$

где  $K_1$  и  $\tilde{K}_2$  – операторы вида (1) с ядрами  $k_1(x, y)$  и  $\overline{k_2(x, y)}$ . Тогда оператор  $C$  можно записать в виде

$$C = A + QB, \quad (6)$$

и применить к нему общие результаты, изложенные выше.

### Проверка аксиом

Обозначим через  $\Omega$  совокупность всех операторов вида  $\lambda I + K + T$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;  $T$  – компактный в  $\ell_p$  оператор. Множество  $\Omega$  образует линейный оператор в пространстве всех линейных ограниченных операторов, действующих в  $\ell_p$ . Покажем, что линейный оператор  $\Omega$  удовлетворяет аксиомам 1–4.

Справедливость аксиомы 1 установлена в работе [5].



Проверим аксиому 2. Для оператора  $A$  вида (4) в качестве  $A_1$  возьмем оператор

$$A_1 = \bar{\lambda}I + \tilde{K}_1, \quad (7)$$

где  $\tilde{K}_1$  – оператор вида (1) с ядром  $\overline{k_1(x, y)}$ . Тогда

$$(A_1 Q\varphi)_m - (QA\varphi)_m = \bar{\lambda}\bar{\varphi}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{k_1(m, n)} \bar{\varphi}_n - \\ - Q\left(\lambda\varphi_m + \sum_{n=1}^{\infty} k_1(m, n)\varphi_n + T\varphi_m\right) = T_1\varphi_m,$$

где  $T_1 = QT$  – компактный оператор. Следовательно, оператор  $A_1Q - QA$  компактен.

Аксиому 3 сформулируем и докажем в виде леммы.

**Лемма.** Множество нетеровых операторов из  $\Omega$  всюду плотно в  $\Omega$ .

*Доказательство.* Рассмотрим оператор  $\lambda I + K$ , где  $\lambda \neq 0$ . Покажем, что его можно приблизить в равномерной операторной топологии нетеровыми операторами из  $\Omega$ . Заметим, что  $\tilde{k}(\xi) = \hat{h}(\xi)$ , где  $\hat{h}(\xi)$  – преобразование Фурье функции  $h(t) = k(1, e^t)e^{t/p'} \in L_1(\mathbb{R})$ . Так как оператор  $\lambda I + K$  не является нетеровым, то функция  $\lambda + \hat{h}(\xi) = \lambda + \tilde{k}(\xi)$  не удовлетворяет условию (2). Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда найдется такая функция  $g \in L_1(\mathbb{R})$ , что

$$\|h - g\|_1 < \varepsilon/2, \quad (8)$$

и при этом

$$\lambda + \hat{g}(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}} \quad (9)$$

(по поводу существования такой функции см. [1, с. 29]). Зафиксируем функцию  $g$ . Пусть  $\alpha = \inf_{\xi \in \dot{\mathbb{R}}} |\lambda + \hat{g}(\xi)|$ . Из непрерывности функции  $\lambda + \hat{g}(\xi)$  на компакте  $\dot{\mathbb{R}}$  и условия (9) следует, что  $\alpha > 0$ . Так как класс  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , состоящий из всех бесконечно дифференцируемых финитных функций, всюду плотен в пространстве  $L_1(\mathbb{R})$ , то найдется такая функция  $g_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , что

$$\|g - g_0\|_1 < \min\{\alpha/2, \varepsilon/2\}. \quad (10)$$

Тогда в силу теоремы Хаусдорфа – Юнга  $\|\hat{g} - \hat{g}_0\|_\infty < \alpha/2$ . Из вышесказанного следует, что

$$|\lambda + \hat{g}_0(\xi)| \geq |\lambda + \hat{g}(\xi)| - |\hat{g}(\xi) - \hat{g}_0(\xi)| \geq \alpha/2.$$

Таким образом,

$$\lambda + \hat{g}_0(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}, \quad (11)$$

причем в силу (8) и (10) справедливо неравенство  $\|h - g_0\|_1 < \varepsilon$ .

Рассмотрим оператор мультипликативной дискретной свертки

$$(K_0\varphi)_m = \sum_{n=1}^{\infty} k_0(m, n)\varphi_n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \text{где}$$

$$k_0(x, y) = \frac{1}{x} g_0\left(\ln \frac{y}{x}\right) \left(\frac{y}{x}\right)^{-1/p'}.$$

Покажем, что функция  $k_0(x, y)$  удовлетворяет условиям 1°–3°. Условие 1° очевидно. Проверим 2°. Имеем

$$\int_0^{\infty} |k_0(1, y)| y^{-1/p'} dy = \int_0^{\infty} |g_0(\ln y)| y^{-1} dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |g_0(t)| dt < \infty.$$

Далее, так как  $g_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , то

$$\int_0^{\infty} |k_0(1, y)| y^{1/p'} = \int_0^{\infty} |g_0(\ln y)| < \infty,$$

т.е. справедливо условие 3°. Нетрудно видеть, что символом оператора  $\lambda I + K_0$  является функция  $\lambda + \hat{g}_0(\xi)$ . Тогда из условия (11) вытекает, что оператор  $\lambda I + K_0$  нетеров.

Положим  $\|A\| = \inf_T \|A - T\|$ , где  $T$  пробегает множество всех компактных операторов. Из [5, теорема 1.2] имеет место оценка

$$\|K - K_0\| \leq \int_0^{\infty} |k(1, y) - k_0(1, y)| y^{-1/p'} dy.$$

После несложных преобразований получаем неравенство  $\|K - K_0\| \leq \|h - g_0\|_1 < \varepsilon$ , из которого следует существование такого компактного оператора  $T_0$ , что  $\|K - K_0 - T_0\| < \varepsilon$ . Соответственно,  $\|(\lambda I + K) - (\lambda I + K_0 + T_0)\| < \varepsilon$ , причем оператор  $\lambda I + K_0 + T_0$  является нетеровым.

Случай  $\lambda = 0$  сводится к предыдущему введением оператора  $\varepsilon I + K$ .

Из всего вышесказанного следует, что всякий оператор  $\lambda I + K + T$  можно аппроксимировать в равномерной операторной топологии нетеровыми операторами из множества  $\Omega$ . Лемма доказана.

Проверим последнюю аксиому. Определим оператор  $U$  равенством  $(U\varphi)_m = i\varphi_m$ . Нетрудно видеть, что  $UQ + QU = 0$ , т.е. аксиома 4 выполнена.

## Критерий нетеровости

Рассмотрим функцию

$$\sigma(\xi) = |\lambda|^2 + \lambda \overline{\tilde{k}_1(-\xi)} + \bar{\lambda} \tilde{k}_1(\xi) + \tilde{k}_1(\xi) \overline{\tilde{k}_1(-\xi)} - |\mu|^2 - \mu \overline{\tilde{k}_2(-\xi)} - \bar{\mu} \tilde{k}_2(\xi) - \tilde{k}_2(\xi) \overline{\tilde{k}_2(-\xi)}, \quad (12)$$

которую будем называть символом оператора  $C$  вида (3).

**Теорема.** Для того чтобы оператор  $C$  вида (3) был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}. \quad (13)$$

В этом случае индекс оператора  $C$  вычисляется по формуле

$$\text{ind } C = -\frac{1}{2} \text{ind } \sigma(\xi) := -\frac{1}{4\pi} \Delta[\arg \sigma(\xi)]_{-\infty}^{\infty}. \quad (14)$$

*Доказательство.* В силу предложения 1, с учетом формулы (6), оператор  $C$  нетеров тогда и только тогда, когда нетеров оператор

$$D = AA_1 - BB_1, \quad (15)$$

где операторы  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  определены формулами (4), (5), (7) соответственно, а  $B_1 = \mu I + K_2$  (здесь  $K_2$  – оператор вида (1) с ядром  $k_2(x, y)$ ).

Найдем символ оператора  $D$ . Заметим, что

$$AA_1 = |\lambda|^2 I + \lambda \overline{\tilde{K}_1} + \bar{\lambda} K_1 + K_1 \overline{\tilde{K}_1} + T_1,$$

где  $T_1$  – компактный оператор. Как известно [5],  $K_1 \overline{\tilde{K}_1} = K_3 + T_2$ , где  $K_3$  – оператор вида (1), ядро которого задается формулой

$$k_3(x, y) = \int_0^{\infty} k_1(x, t) \overline{k_1(t, y)} dt.$$

Найдем  $\tilde{k}_3(\xi)$ . Производя замену  $y = tz$  и пользуясь однородностью функции  $k_1(x, y)$ , запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \tilde{k}_3(\xi) &= \int_0^{\infty} k_3(1, y) y^{-1/p+i\xi} dy = \\ &= \int_0^{\infty} k_1(1, t) dt \int_0^{\infty} k_1(t, y) y^{-1/p+i\xi} dy = \\ &= \int_0^{\infty} t^{-1/p+i\xi} k_1(1, t) dt \int_0^{\infty} k_1(1, z) z^{-1/p+i\xi} dz = \tilde{k}_1(\xi) \overline{\tilde{k}_1(-\xi)}. \end{aligned}$$

С учетом результатов статей [5, 7] символ  $\sigma_1(\xi)$  оператора  $AA_1$  запишется в виде

$$\sigma_1(\xi) = |\lambda|^2 + \lambda \overline{\tilde{k}_1(-\xi)} + \bar{\lambda} \tilde{k}_1(\xi) + \tilde{k}_1(\xi) \overline{\tilde{k}_1(-\xi)}. \quad (16)$$

Аналогично устанавливается, что символ  $\sigma_2(\xi)$  оператора  $BB_1 = |\mu|^2 I + \bar{\mu} K_2 + \mu \overline{\tilde{K}_2} + \tilde{K}_2 K_2$  задается формулой

$$\sigma_2(\xi) = |\mu|^2 + \bar{\mu} \tilde{k}_2(\xi) + \mu \overline{\tilde{k}_2(-\xi)} + \tilde{k}_2(\xi) \overline{\tilde{k}_2(-\xi)}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что символ оператора  $D$  задается формулой (12).

Необходимым и достаточным условием нетеровости оператора  $D$  вида (15), а значит, и оператора  $C$  вида (3) является условие (13) [5, 7]. Далее, учитывая, что  $\text{ind } C = 1/2 \text{ind } D$ , и используя результаты работы [5], приходим к формуле (14). Теорема доказана.

В заключение рассмотрим один важный частный случай. Определим в пространстве  $\ell_p$  оператор  $C_0$  формулой

$$(C_0 \varphi)_m = \lambda \varphi_m + \sum_{n=1}^{\infty} k(m, n) \overline{\varphi_n}, \quad (18)$$

где функция  $k(x, y)$  удовлетворяет условиям  $1^\circ - 3^\circ$ . Тогда в силу равенства (12) символом этого оператора является функция  $\sigma_0(\xi) = |\lambda|^2 - \tilde{k}(\xi) \overline{\tilde{k}(-\xi)}$ .

**Следствие.** Для того чтобы оператор  $C_0$  вида (18) был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\sigma_0(\xi) \neq 0$ ,  $\forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}$ . В этом случае  $\text{ind } C_0 = -1/2 \text{ind } \sigma_0(\xi)$ .

*Доказательство* непосредственно вытекает из теоремы.

## Литература

1. Karapetians N., Samko S. Equations with Involutive Operators. Boston; Basel; Berlin, 2001. 427 p.
2. Авсянкин О.Г. О  $C^*$ -алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига // Докл. РАН. 2008. Т. 419, № 6. С. 727 – 728.
3. Авсянкин О.Г. Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами и коэффициентами, осциллирующими на бесконечности // Диф. уравнения. 2015. Т. 51, № 9. С. 1174 – 1181.
4. Авсянкин О.Г. К вопросу об ограниченности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2015. № 3. С. 5 – 9.
5. Ерусалимский Я.М. Необходимые и достаточные условия нетеровости операторов мультипликативной дискретной свертки // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1973. № 4. С. 105 – 107.
6. Ерусалимский Я.М. Операторы мультипликативной дискретной свертки : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д., 1976. 102 с.

7. Авсянкин О.Г. Об алгебре, порожденной операторами мультипликативной дискретной свертки // Изв. вузов. Математика. 2011. № 1. С. 3–9.

8. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов н/Д., 1988. 192 с.

#### References

1. Karapetyants N., Samko S. *Equations with Involutive Operators*. Boston; Basel; Berlin, 2001, 427 p.

2. Avsyankin O.G. О  $C^*$ -алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига [On the  $C^*$ -algebra generated by multidimensional integral operators with homogeneous kernels and multiplicative operators shift]. *Dokl. RAN*, 2008, vol. 419, no 6, pp. 727-728.

3. Avsyankin O.G. Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами и коэффициентами, оциллирующими на бесконечности [Multidimensional integral operators with homogeneous kernels and coefficients oscillate at infinity]. *Dif. uravneniya*, 2015, vol. 51, no 9, pp. 1174-1181.

4. Avsyankin O.G. К вопросу об ограниченности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами [On the question of the limitations of multidimensional integral operators with homogeneous kernels]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2015, no 3, pp. 5-9.

5. Erusalimskii Ya.M. Необходимые и достаточные условия нетеровости операторов мультипликативной дискретной свертки [Necessary and sufficient conditions of Noetherian operators multiplicative discrete convolution]. *Izv. SKNTs VSh. Estestv. nauki*, 1973, no 4, pp. 105-107.

6. Erusalimskii Ya.M. *Операторы мультипликативной дискретной свертки*: дис. ... канд. физ.-мат. наук [Operators of the multiplicative discrete convolution]. Rostov-on-Don, 1976, 102 p.

7. Avsyankin O.G. Об алгебре, порожденной операторами мультипликативной дискретной свертки [The algebra generated by multiplicative discrete convolution operators]. *Izv. vuzov. Matematika*, 2011, no 1, pp. 3-9.

8. Karapetyants N.K., Samko S.G. *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения* [Equations with involutive operators and their applications]. Rostov-on-Don, 1988, 192 p.

*Поступила в редакцию*

*26 февраля 2016 г.*

УДК 537.531:535.3

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-22-28

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАССЕИВАЮЩИХ СВОЙСТВ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ\*

© 2016 г. А.А. Акопов

Акопов Александр Андреевич – аспирант, физический факультет, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 5, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: flexaaa@mail.ru

Akopov Aleksander Andreevich – Post-Graduate Student, Physical Faculty, Southern Federal University, Zorge St., 5, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: flexaaa@mail.ru

Решена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на многослойной металлодиэлектрической сферической частице. Краевая задача решена точно методом разделения переменных в сферической системе координат с использованием потенциалов Дебая. Определены границы применимости квазистатического приближения. Исследованы плазмонные резонансы. Показано увеличение резонансных свойств металлических наночастиц при их покрытии диэлектрическими оболочками с высоким коэффициентом преломления.

**Ключевые слова:** теория Ми, рассеяние света, многослойные сферы, металлодиэлектрическая структура.

*The diffraction problem of the plane wave scattering on the multilayered metal-dielectric spherical particle has been solved. The exact solution of the boundary problem has been given using Debye potential. Quasi-static approximation borders has been defined. Plasmonic resonances have been studied. The increase of resonance properties of metal nanoparticles by dielectric layers with high permittivity has been shown.*

**Keywords:** Mi theory, light scattering, multilayered spheres, metal-dielectric structure.

В данной работе в оптическом диапазоне теоретически исследуются резонансные свойства шарообразных металлодиэлектрических частиц, в частности металлических наночастиц, покрытых диэлектрической оболочкой. При резонансе амплитуда электромагнитного поля вблизи наночастицы увеличивается на несколько порядков по сравнению с амплитудой поля падающей волны. Этот эффект используется в сенсорах, биодетекторах, элементах базы интегральных схем на плазмонах, в флюоресцентной микроскопии, нелинейной спектроскопии [1].

Рассеянию электромагнитных волн как на шарообразных металлических частицах, так и на частицах, покрытых диэлектрической оболочкой, посвящено значительное число как экспериментальных [2], так и теоретических [3–5] работ. В [6, 7] изучается влияние размеров металлических наночастиц на резонансные свойства. Исследуются некоторые аспекты влияния размеров и формы частиц (золотых и серебряных) на рассеивающие свойства, в частности сечение экстинкции и рассеянное поле. Для расчета многослойных структур в [8] предлагается использовать метод матриц рассеяния. Существуют различные оптимизированные алгоритмы для расчета рассеяния на металлических сферах [8–10]. Программы для расчета многослойных структур отсутствуют, либо их работоспособность не проверена (нет сравнения с известными результатами). Расчеты, производимые программами в соответствии с моделями (например, CST Microwave studio), требуют продолжительных про-

межутков времени и слабо подходят для многослойных структур ввиду особенностей расчета.

В данной статье разработаны метод, алгоритм и программное обеспечение, позволяющие проводить расчеты напряженностей электромагнитного поля, сечения экстинкции для многослойных шарообразных однородных структур. Результаты разработанного программного обеспечения сравнивались с расчетами квазистатическим дипольным приближением, представленным в [11, 12], а также расчетами полей в программе CST Microwave studio. Разработанное программное обеспечение позволило осуществить углубленный анализ многослойных металлодиэлектрических структур и выявить некоторые характерные закономерности.

### Метод решения

Рассмотрим дифракцию плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $z$  на многослойной сфере, находящейся в начале координат (рис. 1). Точка наблюдения –  $P$ ; расстояние до неё –  $r$ ; углы  $\theta$  и  $\varphi$  определяют положение в пространстве. Каждый слой в сфере имеет свои диэлектрическую и магнитную проницаемости, радиус. Введём нумерацию слоев. Номер внешней среды – 1; внутренней сферы с наименьшим радиусом –  $N$ .

Краевая задача решается точно методом разделения переменных в сферической системе  $(r, \varphi, \theta)$  координат с использованием электрического и магнитного потенциалов Дебая [11]. В сферической системе координат напряженности электрического

\*Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части внутренних грантов ЮФУ 2014–2016 гг., № 213.01.-07.2014/08ПЧВГ.

и магнитного поля, выраженные через потенциалы Дебая, имеют вид

$$E_r = \frac{\partial^2(rA)}{\partial r^2} + k^2 \cdot rA,$$

$$E_\varphi = \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(rA)}{\partial r \partial \varphi} + i\omega\mu\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial(rF)}{\partial \theta} \right],$$

$$E_\theta = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rA)}{\partial r \partial \theta} - i\omega\mu\mu_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(rF)}{\partial \varphi} \right],$$

$$H_r = \frac{\partial^2(rF)}{\partial r^2} + k^2 \cdot rF,$$

$$H_\varphi = \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(rF)}{\partial r \partial \varphi} - i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial \theta} \right],$$

$$H_\theta = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rF)}{\partial r \partial \theta} + i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(rA)}{\partial \varphi} \right],$$

где  $A, F$  – электрический и магнитный потенциалы Дебая;  $\omega$  – частота электромагнитного поля в вакууме;  $\varepsilon, \mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $k$  – волновое число в среде.

Задача состоит в нахождении потенциалов, удовлетворяющих волновому уравнению в каждом слое [11]

$$\frac{\partial^2(rA)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2(rA)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial(rA)}{\partial \theta} \sin \theta \right] \right] + k^2 \cdot rA = 0. \quad (1)$$

Аналогичное уравнение для потенциала  $F$ .

Из непрерывности тангенциальных компонент напряженностей полей следуют граничные условия

$$\varepsilon_p A_p = \varepsilon_{p+1} A_{p+1}, \quad \mu_p F_p = \mu_{p+1} F_{p+1},$$

$$\left. \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right|_p = \left. \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right|_{p+1}, \quad \left. \frac{\partial(rF)}{\partial r} \right|_p = \left. \frac{\partial(rF)}{\partial r} \right|_{p+1},$$

где  $p$  – номер текущего слоя.

Решение для потенциалов  $A$  ищется методом разделения переменных [11]. Потенциалы выражаются следующим образом:

$$rA(r, \theta, \varphi) = R(r)Q(\theta)\Phi(\varphi).$$

В результате (1) сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно неизвестных функций  $R(r), Q(\theta), \Phi(\varphi)$  в каждом слое:

$$\frac{d^2[R_{p,n}^{a,f}(r)]}{dr^2} + \left( k_p^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R_{p,n}^{a,f}(r) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dQ}{d\theta} \right) + \left( \alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right) Q = 0.$$

Решение уравнения (1)

$$rA_p(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{p,n,m} R_{p,n}^a(r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi,$$

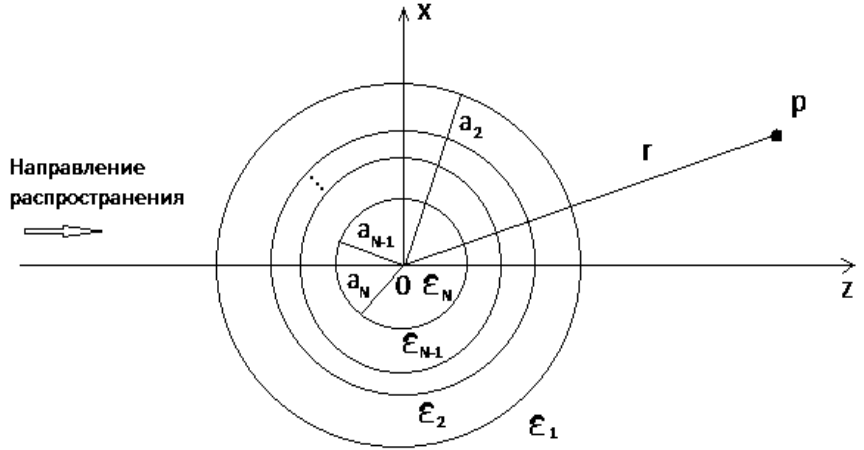


Рис. 1. Исследуемая структура

$$rF_p(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{p,n,m} R_{p,n}^f(r) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi,$$

где  $a_{p,n,m}, f_{p,n,m}$  – неизвестные коэффициенты;  $P_n^m(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра.  $R_{p,n}^a(r)$  – решение уравнения (2) в каждом слое внутри сферы:

$$R_{p,n}^a(r) = \begin{cases} \frac{K_N j_n(k_N r)}{\varepsilon_N j_n(k_N r_N)} = \frac{K_N}{\varepsilon_N} \Phi_{N,n}^-(r), & p = N, \quad 0 \leq r \leq r_N; \\ \frac{1}{\varepsilon_p} [K_p \Phi_{p,n}^-(r) + K_{p+1} \Phi_{p,n}^+(r)], & 2 \leq p < N, \quad r_{p+1} \leq r \leq r_p, \end{cases}$$

где  $K_p$  – неизвестные коэффициенты;

$$\Phi_{p,n}^+(r) = -\frac{1}{\delta} [j_n(k_p r) y_n(k_p r_p) - j_n(k_p r_p) y_n(k_p r)],$$

$$\Phi_{p,n}^-(r) = \frac{1}{\delta} [j_n(k_p r) y_n(k_p r_{p+1}) - j_n(k_p r_{p+1}) y_n(k_p r)],$$

$$\delta = j_n(k_p r_p) y_n(k_p r_{p+1}) - j_n(k_p r_{p+1}) y_n(k_p r_p),$$

$j_n, y_n, h_n$  – линейная комбинация сферических функций Бесселя, Неймана, Ханкеля:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$h_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z).$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$K_p \frac{1}{\varepsilon_p} \Phi_{p,n}'^-(r_{p+1}) + K_{p+1} \left[ \frac{1}{\varepsilon_p} \Phi_{p,n}'^+(r_{p+1}) - \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} \Phi_{p+1,n}'^-(r_{p+1}) \right] = K_{p+2} \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} \Phi_{p+1,n}'^+(r_{p+1}), \quad p = 2, \dots, N-2. \quad (3)$$

$$\frac{K_N}{\varepsilon_N} \Phi_{N,n}'^-(r_N) = \frac{1}{\varepsilon_{N-1}} [K_{N-1} \Phi_{N-1,n}'^-(r_N) + K_N \Phi_{N-1,n}'^+(r_N)]. \quad (4)$$

Из условия нормировки

$$R_{2,n}^a(r_2) = \frac{K_2}{\varepsilon_2} = 1. \quad (5)$$

Уравнения (3)–(5) – рекуррентная схема для определения неизвестных коэффициентов  $K_p$ .

$$R_{2,n}^a(r_p) = \frac{1}{\varepsilon_2} [K_2 \Phi_{2,n}^-(r_p) + K_3 \Phi_{2,n}^+(r_p)]. \quad (6)$$

Для определения  $R_{2,n}^f(r_2)$  в (3)–(6) нужно заменить  $\varepsilon \rightarrow \mu$ .

Остается удовлетворить граничному условию на поверхности многослойной сферы. В декартовой системе координат плоская волна примет вид  $\mathbf{E}^{ext}(E, 0, 0)$ ,  $\mathbf{H}^{ext}(0, H, 0)$ ,  $E = \exp(-ik_1 z)$ ,  $H = E/Z_{c,1}$ , где  $Z_{c,1}$  – характеристическое сопротивление внешней среды.

В сферической системе координат

$$E_r^1 = E \sin \theta \cos \varphi, \quad E_\theta^1 = E \cos \theta \cos \varphi, \quad E_\varphi^1 = -E \sin \varphi,$$

$$H_r^1 = H \sin \theta \sin \varphi, \quad H_\theta^1 = H \cos \theta \sin \varphi, \quad H_\varphi^1 = H \cos \varphi.$$

Потенциалы Дебая  $A^1$ ,  $F^1$  для внешнего поля имеют вид  $rA^1(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \frac{j_n(k_1 r)}{j_n(k_1 r_2)} P_n^m(\cos \theta) \cos \varphi$ ,

$$rF^1(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \frac{j_n(k_1 r)}{j_n(k_1 r_2)} P_n^m(\cos \theta) \sin \varphi,$$

$$\text{где } a_n^1 = \frac{j_n(k_1 r_2)}{k_1^2} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)},$$

$$f_n^1 = \frac{1}{Z_{c,1}} \frac{j_n(k_1 r_2)}{k_1^2} (-i)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Удовлетворяя граничным условиям на поверхности частицы, получаем для рассеянного поля ко-

$$\text{эффициенты } a_{1,n} = \frac{\varepsilon_1 R_{2,n}^a(r_2) - \varepsilon_2 \frac{k_1 j_n'(k_1 r_2)}{j_n'(k_1 r_2)}}{\Delta_a} a_n^1,$$

$$f_{1,n} = \frac{\mu_1 R_{2,n}^f(r_2) - \mu_2 \frac{k_1 j_n'(k_1 r_2)}{j_n'(k_1 r_2)}}{\Delta_f} f_n^1,$$

$$\Delta_a = \varepsilon_2 R_{1,n}^a(r_2) - \varepsilon_1 R_{2,n}^a(r_2), \quad \Delta_f = \mu_2 R_{1,n}^f(r_2) - \mu_1 R_{2,n}^f(r_2),$$

$$R_{1,n}^a(r) = \frac{h_n(k_1 r)}{h_n(k_1 r_2)}, \quad \text{которые позволяют найти потен-$$

циалы Дебая в каждом слое; из выражения для полей – напряженности рассеянного поля в каждом из слоёв. Таким образом, получили решение, позволяющее находить поле, рассеянное на многослойной сфере произвольной конфигурации как вне сферы, так и внутри каждого слоя.

Важной характеристикой рассеяния является сечение экстинкции тела. Для его расчета используем формулу [11]  $Q = 2\lambda_1 \text{Im} \left( \frac{\mathbf{e} \mathbf{a}(\mathbf{n}_0)}{e^2} \right)$ , где  $\mathbf{n}_0$  –

единичный вектор распространения волны;  $\mathbf{a}$  – сила излучения рассеянного поля в направлении  $\mathbf{n}_0$ ;  $\mathbf{e}$  – вектор амплитуды электрического поля падающей волны. В случае сферического тела выражение, от которого берется мнимая часть, – рассеянное поле в направлении  $\theta = \varphi = 0$ , нормированное на

$$\text{амплитуду падающего поля } Q = 2\lambda_1 \text{Im} \left( \frac{(E_\theta)_{\theta=\varphi=0}}{|E_{m\theta 0}|} \right).$$

## Результаты

Произведен анализ границ применимости квазистатического приближения для расчета в оптическом диапазоне рассеянного поля и сечения экстинкции. Это связано с тем, что данный метод получает широкое применение, границы же применимости количественно не обозначены в литературе. Метод позволяет исследовать тела, геометрические размеры которых много меньше длины волны падающего излучения. Размеры сфер не учитываются. Для исследования использовали серебряные и золотые сферы малых диаметров. Диэлектрическая проницаемость металла в оптическом диапазоне взята из электронного справочника [13] и представлена на рис. 2 ( $\lambda$  – длина волны падающего поля в вакууме). Число членов в ряду для квазистатического приближения равно 5, что соответствует точности не менее  $10^{-6}$ .

Для проведения анализа применимости квазистатического приближения теории Ми [11] рассчитаны сечения экстинкции золотых (рис. 3а) и серебряных (рис. 3б) сфер; внешняя среда – воздух ( $\varepsilon_1=1$ ). Для квазистатического приближения радиус сферы  $r_2=5$  нм; точное решение получено для радиусов  $r_2=10, 20, 40, 60$  нм. По результатам расчетов построены графики зависимости сечения экстинкции от длины волны. Из рис. 3 видно, что квазистатическое приближение [11, 12] позволяет оценить резонансные характеристики с ошибкой менее 3% при соотношении размеров частиц к длине волны не более 5%.

Рассмотрим влияние диэлектрических оболочек металлических сфер на рассеяние электромагнитных волн. При расчетах учитывалось 50 членов в рядах, что обеспечивает точность не менее  $10^{-6}$  при указанных соотношениях максимального радиуса сферы и длины волны.

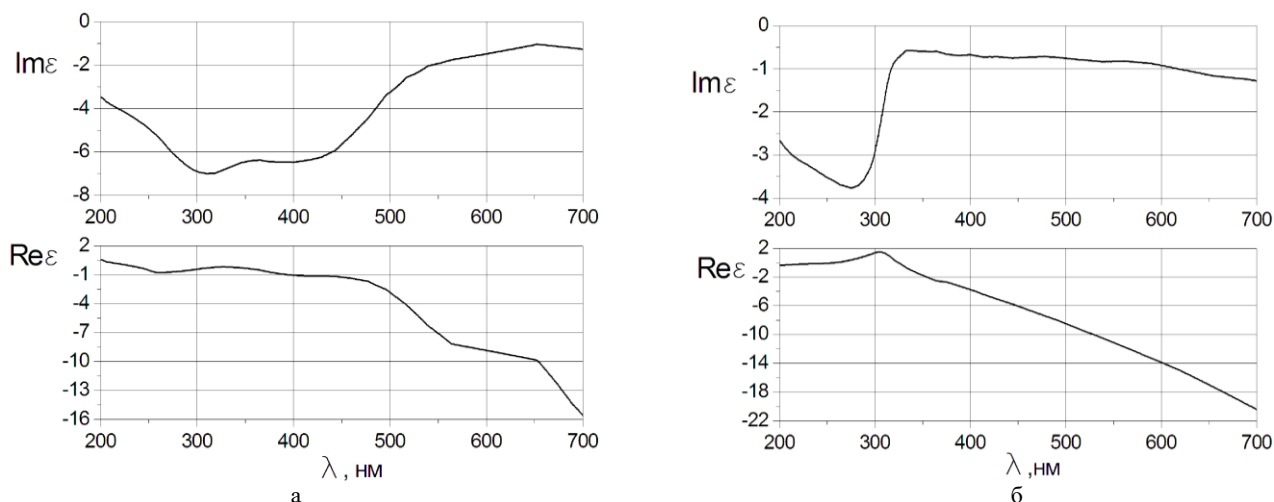


Рис. 2. Зависимость мнимой и действительной частей от длины волны: а – для золота; б – для серебра

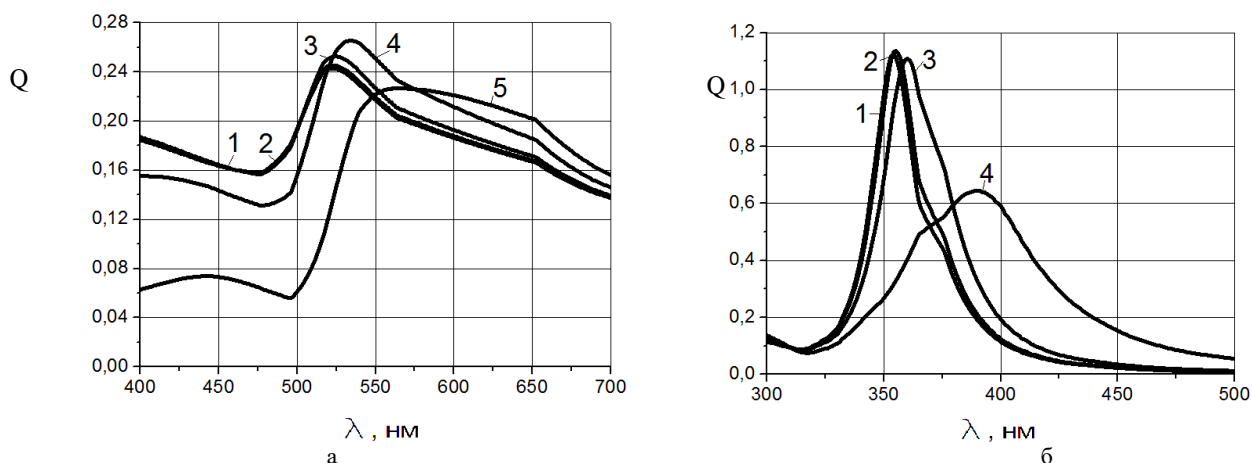


Рис. 3. Зависимость коэффициента экстинкции от длины волны для золотых (а) и серебряных (б) сфер радиусом 5 нм в квазистатическом приближении (1) и точное решение для сфер радиусов 10 (2), 20 (3), 40 (4), 60 нм (5)

Графики зависимости интенсивности рассеянного поля от длины волны в направлении распространения волн приведены на рис. 4. Рассчитана зависимость амплитуды напряженности электрического поля, рассеянного на золотых (а) и серебряных (б) сферах радиусом  $r_3=150$  нм, покрытых диэлектрической оболочкой с внешним радиусом  $r_2=200$  нм. Диэлектрическая проницаемость оболочки  $\epsilon_2$  принимает значения 1,5 (1), 1,6 (2), 1,8 (3), 2,0 (4). Поле рассчитывалось в направлении распространения волны на расстоянии 300 нм. Как видно из рис. 4, увеличение диэлектрической проницаемости оболочки приводит к сдвигу максимума рассеяния. Изменение диэлектрической проницаемости оболочки с 1,5 до 2,0 приводит к росту интенсивности рассеяния поля в направлении распространения примерно в 1,8 раза.

На рис. 5, 6 показаны графики зависимости напряженности рассеянного электромагнитного поля

в направлении распространения от длины волны при изменяющихся соотношениях между радиусами металлической сферы и диэлектрической оболочки для золотых (а) и серебряных (б) сфер. На рис. 5 радиусы металлических сфер  $r_3=150$  (1), 175 (2), 200 нм (3). Они покрыты диэлектрической оболочкой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2=1,5$ . Общий радиус сфер с оболочкой равен  $r_2=250$  нм. На рис. 6 радиус металлических сфер 200 нм. Они покрыты диэлектрической оболочкой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2=1,5$ . Общий радиус сфер с оболочкой  $r_2=250$  (1), 275 (2), 300 (3) нм. Из рис. 5, 6 видно, что при увеличении толщины диэлектрической оболочки по сравнению с диаметром металлической сферы внутри смещается максимум рассеяния электромагнитных волн в более длинноволновую область спектра, а также увеличивается его интенсивность.

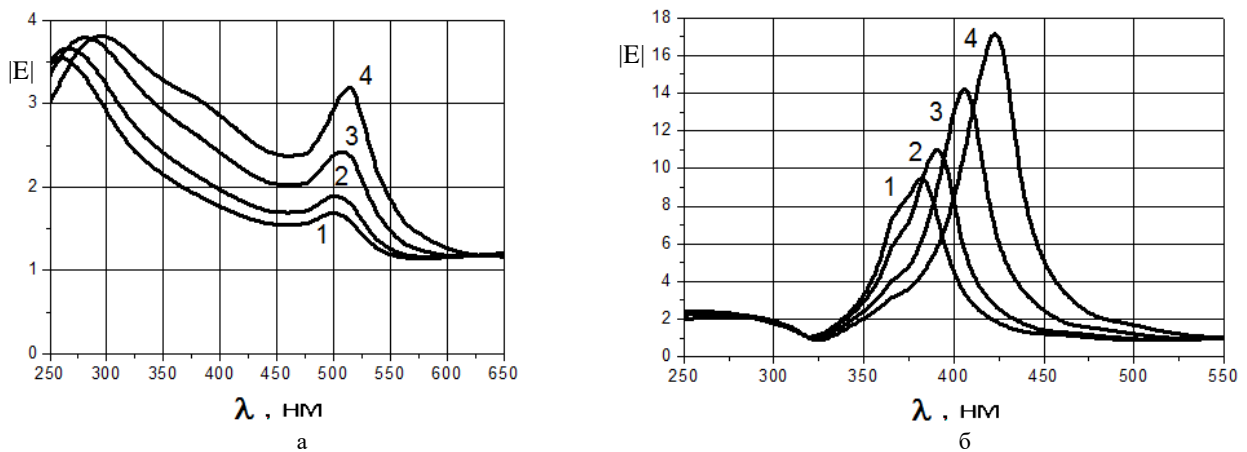


Рис. 4. Зависимость напряженности электрического поля от длины волны в направлении распространения электромагнитной волны для золотых (а) и серебряных (б) сфер диаметром 150 нм, покрытых оболочкой, с внешним радиусом 200 нм и  $\epsilon=1,5(1), 1,6(2), 1,8(3), 2,0(4)$ . Расстояние точки наблюдения от центра сферы – 300 нм

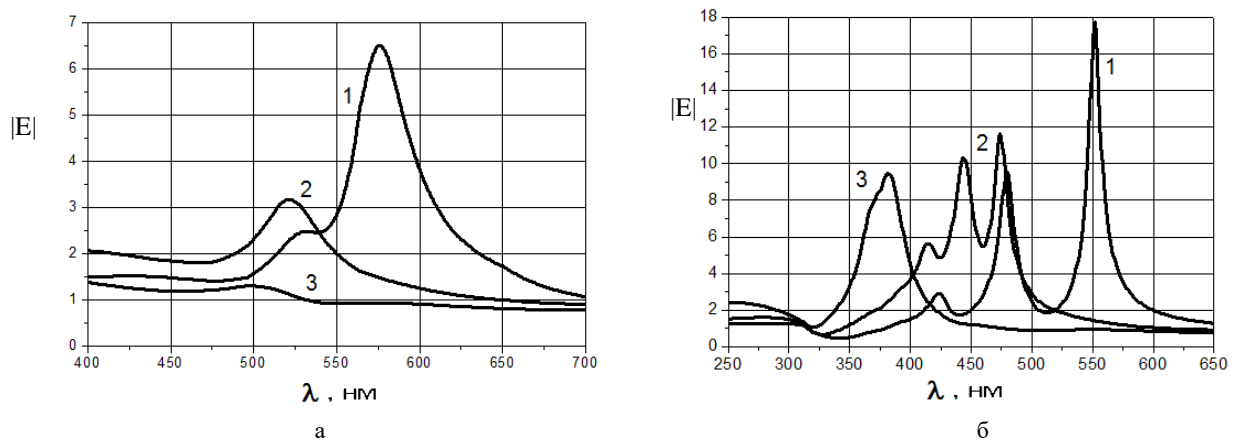


Рис. 5. Зависимость напряженности рассеянного электромагнитного поля в направлении распространения волны на золотых (а) и серебряных (б) сферах радиусом 150 (1), 175 (2), 200 нм (3), покрытых диэлектрической оболочкой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=1,5$ . Общий радиус сфер равен 250 нм. Расстояние точки наблюдения от центра сферы – 300 нм

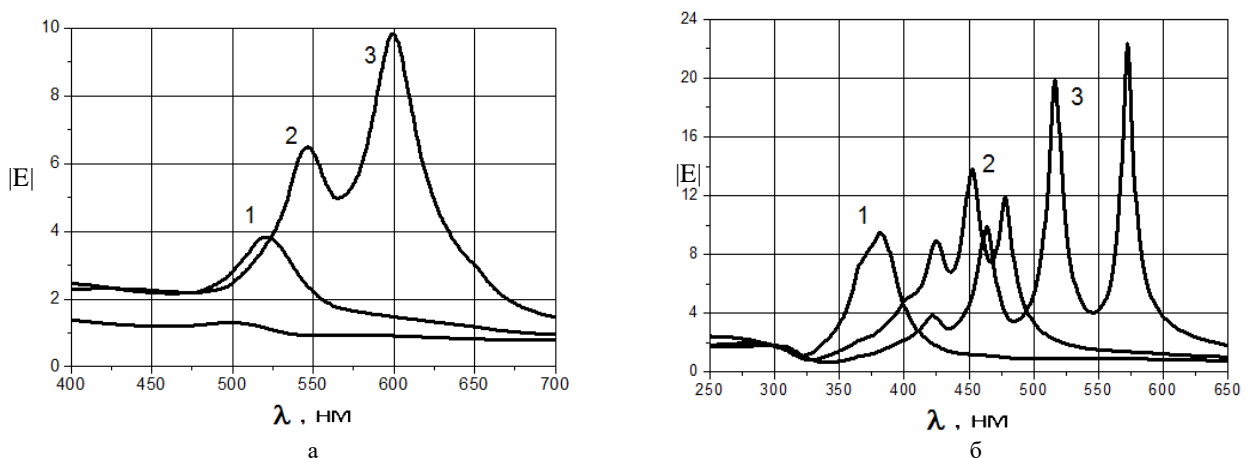


Рис. 6. Зависимость напряженности рассеянного электромагнитного поля в направлении распространения волны на золотых (а) и серебряных (б) сферах радиусом 200 нм, покрытых диэлектрической оболочкой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=1,5$ , и внешним радиусом 250 (1), 275 (2), 300 (3) нм. Расстояние точки наблюдения от центра сферы – 400 нм



На рис. 7 показаны зависимости напряженности рассеянного электромагнитного поля уже трехслойной структуры. Радиус металлических сфер  $r_4=150$  нм. Радиус первой оболочки  $r_3=200$  нм, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_3=1,5$ ; внешний радиус  $r_2=250$  нм, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_2=1,6$  (1), 1,8 (2), 2,0 (3). Изменение максимума рассеяния и амплитуды аналогично

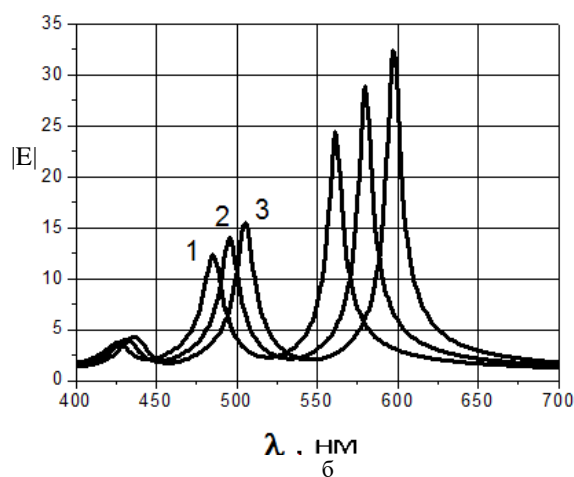
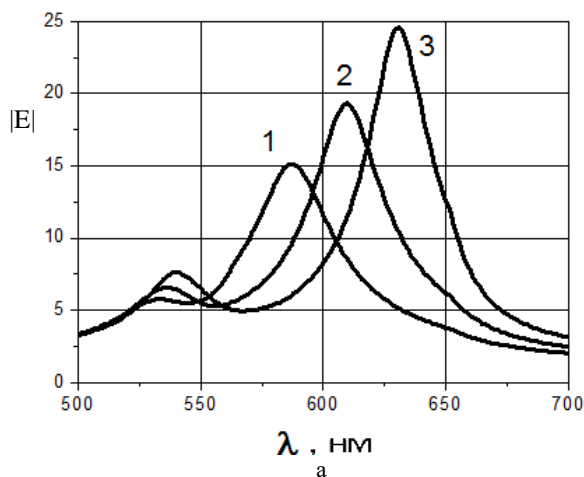


Рис. 7. Зависимость напряженности рассеянного электромагнитного поля в направлении распространения волны на золотых (а) и серебряных (б) сферах радиусом 150 нм, покрытых двумя диэлектрическими оболочками. Радиус первой оболочки 200 нм, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon=1,5$ . Внешний радиус 250 нм, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon=1,6$  (1), 1,8 (2), 2,0 (3)

### Выводы

Решена краевая задача о дифракции электромагнитной волны на многослойном шаре. Полученное решение и компьютерная программа позволяют исследовать дифракционные характеристики при произвольном числе слоев и соотношении длины волны к размерам. Показана возможность расчета структур с дискретным распределением диэлектрической проницаемости по радиусу.

Анализ границ применимости квазистатического приближения при расчетах металлических структур показал, что оно обеспечивает погрешность менее 3 % при соотношениях размеров частиц к длине волны не более 0,05. Показано увеличение амплитуд колебаний на резонансе металлических наночастиц при их покрытии диэлектрическими оболочками с высоким коэффициентом преломления.

### Литература

1. Климов В.В. Наноплазмоника. М., 2009. 480 с.
2. Kim K.H., Husakou A., Herrmann J. Linear and nonlinear optical characteristics of composites containing

случаю двуслойной сферы – при изменении диэлектрической проницаемости внешнего слоя с 1,6 до 2,0 интенсивность рассеяния возрастает примерно в 2 раза. Следует отметить, что в структурах с большим числом слоев проще получать необходимые резонансные свойства, так как изменения в одном из слоев меньше влияют на общую характеристику.

metal nanoparticles with different sizes and shapes // Optics Express. 2010. Vol. 18, № 7. P. 7488 – 7496.

3. Elliott G.R., Murugan G.S., Wilkinson J.S., Zerwas M.N., Herwak D.W. Chalcogenide glass microsphere laser // Optics Express. 2010. Vol. 18, № 25. P. 26720 – 26727.

4. Kachan S.M., Ponyavina A.N. Resonance absorption spectra of composites containing metal-coated nanoparticles // J. of Molecular Structure. 2000. Vol. 563 – 564. P. 267 – 272.

5. Bhandari R. Scattering coefficients for a multilayered sphere: analytic expressions and algorithms // Applied Optics. 1985. Vol. 24, № 13. P. 1960 – 1967.

6. Peng S., McMahon J.M., Schatz G.C., Gray S.K., Sun Y. Reversing the size-dependence of surface plasmon resonances // PNAS. 2010. Vol. 107, № 33. P. 14530 – 14534.

7. Jain P.K., Lee K.S., El-Sayed I.H., El-Sayed M.A. Calculated Absorption and Scattering Properties of Gold Nanoparticles of Different Size, Shape, and Composition: Applications in Biological Imaging and Biomedicine // J. Phys. Chem. B. 2006. Vol. 110. P. 7238 – 7248.

8. Du H. Mie scattering calculation // Applied Optics. 2004. Vol. 43, № 9. P. 1951 – 1956.

9. Kai L. Massoli P. Scattering of electromagnetic plane waves by radially inhomogeneous spheres: a finely

stratified sphere model // *Applied Optics*. 1994. Vol. 33, iss. 3. P. 501 – 511.

10. Johnson B.R. Light scattering by a multilayer sphere // *Applied Optics*. 1996. Vol. 35, iss. 18. P. 3286 – 3296.

11. Борн М, Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.

12. Майер С.А. Плазмоника: теория и приложения. М., Ижевск, 2011. 296 с.

13. Index of refraction, thin film, optical simulation and ray tracing. URL: <http://www.luxpop.com> (дата обращения: 03.10.2015).

#### References

1. Klimov V.V. *Nanoplasmonika* [Nanoplasmonics]. Moscow, 2009, 480 p.

2. Kim K.H., Husakou A., Herrmann J. Linear and nonlinear optical characteristics of composites containing metal nanoparticles with different sizes and shapes. *Optics Express*, 2010, vol. 18, no 7, pp. 7488-7496.

3. Elliott G.R., Murugan G.S., Wilkinson J.S., Zervas M.N., Herwak D.W. Chalcogenide glass microsphere laser. *Optics Express*, 2010, vol. 18, no 25, pp. 26720-26727.

4. Kachan S.M., Ponyavina A.N. Resonance absorption spectra of composites containing metal-coated nanoparticles. *J. of Molecular Structure*, 2000, vol. 563-564, pp. 267-272.

5. Bhandari R. Scattering coefficients for a multilayered sphere: analytic expressions and algorithms. *Applied Optics*, 1985, vol. 24, no 13, pp. 1960-1967.

6. Peng S., McMahon J.M., Schatz G.C., Gray S.K., Sun Y. Reversing the size-dependence of surface plasmon resonances. *PNAS*, 2010, vol. 107, no 33, pp. 14530-14534.

7. Jain P.K., Lee K.S., El-Sayed I.H., El-Sayed M.A. Calculated absorption and scattering properties of gold nanoparticles of different size, shape, and composition: applications in biological imaging and biomedicine. *J. Phys. Chem. B.*, 2006, vol. 110, pp. 7238-7248.

8. Du H. Mie scattering calculation. *Applied Optics*, 2004, vol. 43, no 9, pp. 1951-1956.

9. Kai L. Massoli P. Scattering of electromagnetic-plane waves by radially inhomogeneous spheres: a finely stratified sphere model. *Applied Optics*, 1994, vol. 33, is. 3, pp. 501-511.

10. Johnson B.R. Light scattering by a multilayer sphere. *Applied Optics*, 1996, vol. 35, is. 18, pp. 3286-3296.

11. Born M., Wolf E. *Osnovy optiki* [Principles of optics]. Moscow, 1973.

12. Maier S.A. *Plazmonika: teoriya i prilozheniya* [Plasmonics: Theory and Applications]. Moscow; Izhevsk, 2011, 296 p.

13. Index of refraction, thin film, optical simulation and ray tracing. Available at: <http://www.luxpop.com> (accessed 03.10.2015).

УДК 536.22

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-29-34

## ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

© 2016 г. В.А. Батищев, В.А. Гетман, В.В. Перекрестов

*Батищев Владимир Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедры теоретической и компьютерной гидродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: batish@math.sfedu.ru*

*Batishchev Vladimir Andreevich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of Theoretical and Computer Fluid Dynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: batish@math.sfedu.ru*

*Гетман Вероника Андреевна – аспирант, кафедры теоретической и компьютерной гидродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: vagetman@sfedu.ru*

*Getman Veronika Andreevna – Post-Graduate Student, Department of Theoretical and Computer Fluid Dynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vagetman@sfedu.ru*

*Перекрестов Валерий Владимирович – студент, кафедры теоретической и компьютерной гидродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: bymbarasch@ya.ru*

*Perekrestov Valerii Vladimirovich – Student, Department of Theoretical and Computer Fluid Dynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: bymbarasch@ya.ru*

*На основе приближения Обербека – Буссинеска рассмотрена задача о термогравитационном течении неоднородной жидкости в слое конечной толщины при неравномерном нагреве свободной поверхности. В безразмерных переменных перед старшими производными в уравнениях движения возникает малый параметр, что приводит к появлению тонкого термогравитационного пограничного слоя вблизи свободной поверхности. Показано, что в зависимости от направления продольного градиента температуры на границе могут возникать в пограничном слое либо два вращательных режима, либо несколько режимов течений жидкости без вращения.*

**Ключевые слова:** свободная граница, приближение Обербека – Буссинеска, пограничный слой, вращение.

*For the equations of fluid flow in Oberbeck-Boussinesq approximation is studied for non-uniform thermogravitational flow in the restriction on the free surface and the solid boundary. For fluid flow caused by the uneven heating of the free boundary, found similar solution in the boundary layer near the free surface. Thermocapillary effects are not taken into account. It is shown that depending on the direction of the longitudinal temperature gradient can arise either two rotational modes or multiple modes fluid flows without rotation.*

**Keywords:** free surface, the Oberbek-Boussinesq approximation, boundary layer, rotation.

Нелинейные пограничные слои вблизи свободной поверхности однородной жидкости, вызванные неравномерным нагревом этой поверхности, интенсивно изучались в конце прошлого столетия в связи с проведением экспериментов в космосе. Эти пограничные слои вызваны термокапиллярным эффектом Марангони. Первая работа по слоям Марангони опубликована в 1979 г. L.G. Napolitano [1]. Затем появилась серия публикаций по этому направлению. Отметим важную работу В.В. Пухначева [2]. Нелинейный пограничный слой вблизи свободной границы может возникать при воздействии на эту границу касательных напряжений, которые вызваны ветровыми нагрузками. Первые решения в этих задачах получены В.Я. Шкадовым [3].

Отметим, что при термокапиллярном эффекте на свободной поверхности возникают касательные напряжения вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры. В случае его зависимости от концентрации примеси возникают поверхностные касательные напряжения, которые приводят к формированию нелинейного концентрационного пограничного слоя. В однородной жидкости, движение которой описывается системой Навье – Стокса, уравнениями пограничного слоя во всех перечисленных случаях являются уравнения Прандтля с краевыми условиями для поверхностных касательных напряжений, которые и приводят к формированию нелинейного пограничного слоя. В случае неоднородной жидкости,

движение которой рассчитывается на основе уравнений в приближении Обербека – Буссинеска, – иная ситуация. Теперь нелинейный пограничный слой может возникать как с учетом термокапиллярного эффекта, так и без этого эффекта, т.е. при отсутствии поверхностных касательных напряжений. Причиной является обратное влияние температурного поля на поле скоростей жидкости, так как температура входит в уравнения движения. При наличии внешнего потока жидкости при малых поверхностных градиентах температуры скорость внешнего потока может быть много больше, чем погранслоевая поправка к этой скорости. Уравнения пограничного слоя линейризуются. Сначала определяется температура, а затем поле скорости. Итак, в этом случае касательные напряжения не играют определяющей роли, так как это происходит в однородной жидкости в перечисленных случаях. В данной работе рассчитан термогравитационный пограничный слой вблизи свободной поверхности без учета термокапиллярного эффекта. Касательные напряжения на свободной границе отсутствуют. Исследовано влияние внешнего потока жидкости. Вдоль свободной границы вблизи оси симметрии жидкость либо нагрета, либо охлаждена по отношению к температурным условиям вне пограничного слоя. В первом случае найден только один режим без вращения жидкости. Во втором обнаружены два вращательных режима и два – без вращения жидкости.

### Уравнения движения

Изучается стационарное осесимметричное течение вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в горизонтальном слое, ограниченном сверху свободной границей  $\Gamma$ , а снизу – твердой стенкой  $S$ . Толщина слоя равна  $h_0$ . Вдоль свободной границы задано неравномерное распределение температуры, так что вблизи оси симметрии поверхностный градиент температуры либо положителен, либо отрицателен. При малых значениях диффузионных коэффициентов вязкости и теплопроводности вблизи свободной границы возникает тонкий пограничный слой, вне которого в первом приближении течение жидкости невязкое. Жидкость считается неоднородной по плотности. За основу расчетов принимаются уравнения движения в приближении Обербека – Буссинеска  $(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{g} \beta T$ ,  $\sqrt{\nu} \nabla T = \chi \Delta T$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

Здесь  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$  – вектор скорости;  $r, \theta, z$  – цилиндрические координаты;  $T$  – температура жидкости;  $p$  – давление;  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ;  $g$  – ускорение свободного падения. Параметры  $\nu, \chi, \beta$  –

коэффициенты кинематической вязкости, теплопроводности и теплового расширения. Движение жидкости считается осесимметричным, т.е. вектор скорости, давление и температура не зависят от окружной координаты  $\theta$ . На свободной поверхности  $\Gamma$  выполняются динамические условия для нормальных и касательных напряжений, кинематическое условие, а также задана температура

$$p = 2\nu \rho \mathbf{n} \Gamma \mathbf{n} - \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \quad \mathbf{v} \mathbf{n} = 0, \\ 2\nu \rho (\Gamma \mathbf{n} - (\mathbf{n} \Gamma \mathbf{n}) \mathbf{n}) = 0, \quad T = T_\Gamma, \quad (r, z) \in \Gamma.$$

Предполагается, что давление на свободной границе постоянно, т.е.  $p_* = \text{const}$ . В краевых условиях через  $\mathbf{n}$  обозначен вектор внешней нормали к свободной границе;  $\Gamma$  – тензор скоростей деформации;  $k_1, k_2$  – главные кривизны свободной поверхности.

На твердой стенке выполняется условие прилипания  $\mathbf{v} = 0$  и задана постоянная температура  $T = \text{const}$ . Отметим, что в данной работе термокапиллярный эффект не учитывается, поэтому считаем, что  $\sigma = \text{const}$ .

Предположим, что распределение температуры вдоль свободной границы задано по квадратичному закону:  $T_\Gamma - T_* = 0,5\tau T_*(r^2/a^2 - 1)$  при  $0 \leq r \leq a$  и  $T = T_*$  для  $r > a$ . Через  $\tau$  обозначен безразмерный параметр, равный  $2\Delta T_\Gamma / T_*$ ;  $\Delta T_\Gamma$  – разность температур на свободной границе между осью симметрии и окружностью  $r = a$ . Через  $T_*$  обозначена средняя постоянная температура слоя жидкости вне пограничного слоя. Параметр  $\tau$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При  $\tau > 0$  жидкость на свободной границе внутри круга  $r \leq a$  охлаждена по сравнению с температурой  $T_*$ . В этом случае вблизи оси симметрии может возникать вращательный режим движения жидкости. При  $\tau < 0$  внутри круга свободная граница нагрета по сравнению с  $T_*$ . Вращение жидкости не возникает. В случае тонкого слоя этот факт обнаружен в [4]. В однородной жидкости это показано в [5, 6].

Приближение Обербека – Буссинеска и краевые условия записываем в цилиндрических координатах. Приведем уравнение только для осевой компоненты скорости

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z + g \beta T. \quad (1)$$

Поместим начало системы координат на свободную поверхность, тогда уравнение твердой стенки представим как  $z = -h_0$ . Решение уравнений движения жидкости запишем в виде

$$\begin{aligned} v_r &= rF'(s)va^{-2}, \quad v_z = -2va^{-1}F(s), \quad v_\theta = rG(s)va^{-2}, \\ T - T_* &= T_* a^{-2} (0,5r^2 T_1(s) + a^2 T_2(s)), \\ p &= -\rho v^2 a^{-4} (0,5r^2 p_1(s) + a^2 p_2(s)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $s = z/a$ . Введем безразмерный параметр  $h = h_0/a$ . Формулы (2) описывают термогравитационное течение жидкости в горизонтальном слое с твердой нижней границей и свободной верхней поверхностью. Ниже будет показано, что решению (2) удовлетворяет горизонтальная свободная граница с уравнением  $z=0$ . Течение жидкости вызвано либо нагревом, либо охлаждением свободной границы. Отметим, что решение (2) описывает течение жидкости только вблизи оси симметрии  $Oz$  и не распространяется на случай больших значений радиальной координаты.

Введем параметр  $\varepsilon$  по формуле  $\varepsilon^2 = v^2 / (g\beta T_* a^3)$ . Для конечных значений  $a$  параметр  $\varepsilon$  оказывается малым.

Подставляем функции (2) в уравнения движения и в краевые условия, разделяем переменные. Для функций  $F, G, T_1, T_2, p_1, p_2$  выводим краевую задачу, которая содержит малый параметр  $\varepsilon^2$  только в уравнении, содержащем ускорение свободного падения (уравнение (1)). Далее введем преобразование  $F(s) = f(s)/\varepsilon, G(s) = \bar{G}(s)/\varepsilon$ . В результате приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \varepsilon f^{(4)} &= -2(ff''' + \bar{G}\bar{G}') + T_1, \\ \varepsilon T_1'' &= 2Pr(f'T_1 - fT_1'), \\ \varepsilon T_2'' &= -2Pr fT_2' - 2\varepsilon T_1, \quad \varepsilon \bar{G}'' = 2(f'\bar{G} - f\bar{G}'), \\ f=0, f''=0, \bar{G}'=0, T_1 &= \tau, T_2 = -\tau/2 \quad (s=0), \\ f=0, f'=0, \bar{G}=0, T_1 &= 0, T_2 = 0 \quad (s=-h). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $Pr = \nu/\chi$  – число Прандтля. В расчетах полагаем  $Pr=7$ .

После решения последней задачи функции  $p_1$  и  $p_2$  вычисляем по формулам  $p_1 = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^s T_1 ds$ ,  $p_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( 2f^2 + 2\varepsilon f'' - \int_0^s T_2 ds \right) + const$ , из которых следует, что давление на поверхности  $s=0$  постоянно. Итак, свободная граница вблизи оси симметрии горизонтальна:  $z=0$ . Вклад функций  $p_1$  и  $p_2$  в давление  $p$  имеет порядок  $O(1)$ , так как в формулах (2) для функции  $p$  стоит множитель, который в безразмерной форме имеет порядок  $O(\varepsilon^2)$ .

### Асимптотический метод

Краевая задача (3) содержит малый параметр перед старшими производными. В данном случае это означает, что вблизи свободной границы возникает термогравитационный пограничный слой. Вне этого слоя течение жидкости приближенно описывается уравнениями невязкой жидкости. Чтобы найти порядок толщины пограничного слоя и порядки функций  $f, T_1, T_2, \bar{G}$ , необходимо ввести преобразование растяжения и представить функции  $f, \bar{G}$  в виде

$$s = \varepsilon^k s_1, \quad f = \varepsilon^n F_1(s_1), \quad \bar{G} = \varepsilon^m G_1(s_1). \quad (4)$$

Чтобы найти  $k, n, m$ , нужно подставить формулу (4) в задачу (3) и оценить порядки главных членов в левых и правых частях уравнений и краевых условий. Здесь возникают два случая. В первом внешний поток жидкости индуцируется самим пограничным слоем. Скорость жидкости вне области пограничного слоя  $D_\Gamma$  имеет более высокий порядок, чем в области  $D_\Gamma$ . Во втором случае внешний поток задан независимо от наличия пограничного слоя, причем скорость внешнего потока жидкости имеет такой же порядок по параметру  $\varepsilon$ , как и порядок скорости в области пограничного слоя.

Рассмотрим первый случай. Параметры  $k, n, m$  принимают значения  $k=2/5, n=3/5$  и  $m=1/5$ . Итак, толщина пограничного слоя имеет порядок  $O(\varepsilon^{2/5})$ . Учитывая, что переменная  $s$  отрицательна в области течения, введем преобразование  $\eta = -s_1$ . В главном приближении получаем уравнения пограничного слоя вблизи свободной границы

$$\begin{aligned} F_1^{(4)} &= 2F_1 F_1^{(3)} + 2G_1 G_1' + T_1, \\ T_1'' &= 2Pr(F_1 T_1' - F_1' T_1), \quad T_2'' = 2Pr F_1 T_2', \\ G_1'' &= 2(F_1 G_1' - F_1' G_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Краевые условия на бесконечности для полученных уравнений выполняются при выходе из области пограничного слоя и означают исчезновение радиальной и окружной компонент скорости, касательных напряжений и функций  $T_1, T_2$ , т.е.  $F_1' = 0, F_1'' = 0, G_1 = 0, T_1 = 0, T_2 = 0$  ( $\eta = +\infty$ ).

Учитывая формулы (2) и (4), находим, что радиальная и окружная компоненты скорости в пограничном слое имеют порядок  $O(\varepsilon^{1/5})$ , температура – конечный порядок  $O(1)$ . Порядок осевой компоненты скорости равен  $O(\varepsilon^{3/5})$ . Отметим, что пограничный слой индуцирует внешнее невязкое течение жидкости со скоростью порядка  $O(\varepsilon^{3/5})$ .

Рассмотрим второй случай. Теперь для вывода уравнений движения применяем метод пограничного слоя [7]. Представим функции  $f, T_1, T_2, \bar{G}$  в виде асимптотических разложений при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f(s) = \varepsilon^{1/5} f_0(s) + \varepsilon^{3/5} (H(\eta) + f_1(s)) + O(\varepsilon), \quad (6)$$

$$T_1 = T_{11}(\eta) + \varepsilon^{2/5} (T_{12}(\eta) + T_{10}(s)) + \dots,$$

$$T_2 = T_{21}(\eta) + \varepsilon^{2/5} T_{22}(\eta) + \dots,$$

$$\bar{G} = \varepsilon^{1/5} G_0(\eta) + \dots$$

В формулах (6) функции  $H(\eta), T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}, G_0$  определены в области пограничного слоя  $D_\Gamma$  и исчезают при выходе из него. Учитывая, что  $\bar{G} \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow +\infty$ , получаем, что вращение жидкости возникает только в пограничном слое и отсутствует вне этого слоя. Функции  $f_0(s), f_1(s)$  определены как в пограничном слое, так и в области внешнего течения и определяют осевую компоненту скорости вне  $D_\Gamma$ . Функция  $T_{10}(s)$  определяет поле температур в главном приближении вне области пограничного слоя. Соответствующую поправку в формуле для функции  $T_2$  представим в виде  $\varepsilon^{6/5} T_{20}(s)$ .

Для определения функций  $f_0(s), T_{10}(s), T_{20}(s)$  применяем первый итерационный процесс метода пограничного слоя [7]. В результате приходим к краевой задаче, из которой находим  $f_0 = U_0 s(s+h)(1+bs)$ ,  $T_{10} = 12bU_0 f_0(s)$ ,  $T_{20} = 0$ .

Здесь параметр  $U_0$  пропорционален скорости внешнего потока на свободной границе. Далее полагаем  $b=0$ , т.е. считаем, что вне пограничного слоя температура постоянна и равна  $T_*$ .

Подставляем асимптотические разложения (6) в уравнения Обербека – Буссинеска и применяем второй итерационный процесс [7]. В результате приходим к системе уравнений в области пограничного слоя

$$H^{(4)}(\eta) = 2H'''(H - \eta U) + 2G_0 G_0' + T_{11},$$

$$T_{11}'' = 2\text{Pr}((H - \eta U)T_{11}' - (H' - U)T_{11}), \quad (7)$$

$$T_{21}'' = 2\text{Pr}(H - \eta U)T_{21}',$$

$$G_0'' = 2((H - \eta U)G_0' - (H' - U)G_0).$$

Краевые условия для системы (7) приводятся к виду

$$H=0, H''=0, G_0'=0, T_{11}=\tau, T_{21}=-\tau/2 \quad (\eta=0), \quad (8)$$

$$H'=0, H'''=0, G_0=0, T_{11}=0, T_{21}=0 \quad (\eta=+\infty).$$

Здесь  $U = U_0 h$ . Отметим, что краевая задача (7), (8) содержит три параметра:  $U, \tau, \text{Pr}$ .

## Результаты численных расчетов

Краевая задача для системы уравнений (5) решалась численно методом пристрелки. На рис. 1 приведены результаты расчетов радиальной компоненты скорости в случае, когда внешний поток индуцируется только пограничным слоем. Пунктирная линия соответствует случаю  $\tau = -0,75$ . В этом случае на свободной границе вблизи оси симметрии жидкость нагрета по отношению к области вне пограничного слоя. Скорость жидкости монотонно убывает при удалении от свободной границы  $\Gamma$  и направлена от оси симметрии. Вращательные режимы не обнаружены. Зависимость температуры жидкости от поперечной координаты  $\eta$  различна для разных значений радиальной координаты. Для  $r < r_0$  температура жидкости монотонно убывает при удалении от свободной границы. Для  $r > r_0$  в профиле температуры имеется одна точка локального максимума. Для  $r = r_0$  производная температуры по координате  $\eta$  обращается в нуль на свободной границе ( $r_0 = 0,7905a$ ).

В случае  $\tau = 0,75$  жидкость на свободной границе вблизи оси симметрии охлаждена по сравнению с областью вне пограничного слоя. Сплошная линия на рис. 1 изображает изменение радиальной компоненты скорости поперек пограничного слоя. Краевая задача допускает два симметричных решения  $F_1, \pm G_1, T_1, T_2$  (численные значения –  $F_1'(0) \approx -0,1926$ ,  $G_1(0) \approx 1,429$ ).

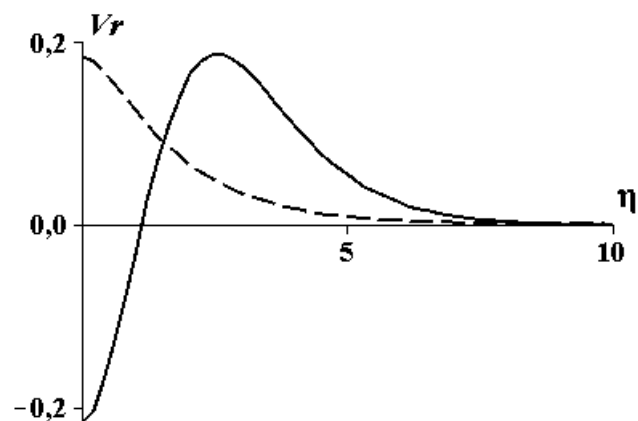


Рис. 1. Распределение радиальной компоненты скорости в пограничном слое

Отметим, что вблизи свободной границы возникает тонкая зона противотока, в которой жидкость движется по направлению к оси симметрии. Вне зоны противотока жидкость, как и при  $\tau = -0,75$ ,

движется от оси симметрии. В обоих случаях течение жидкости в области пограничного слоя  $D_\Gamma$  индуцирует внешнее невязкое медленное течение вне  $D_\Gamma$ , скорость которого направлена к свободной поверхности. При  $\tau=0,75$  в области пограничного слоя  $D_\Gamma$  возникает вращение жидкости, причем вне этого слоя вращение отсутствует. Распределение температуры жидкости внутри пограничного слоя зависит от значения радиальной координаты. Для  $r < r_1$  температура монотонно возрастает при удалении от свободной границы. При  $r = r_1$  температура является неубывающей функцией координаты  $\eta$ ; при  $r > r_1$  профиль температуры имеет локальный максимум и локальный минимум. Отметим, что  $r_1 \approx 0,403a$ . При выходе из пограничного слоя температура асимптотически стремится к значению  $T_*$ . Радиальная компонента теплового потока направлена к оси симметрии. Таким образом, вращение жидкости в пограничном слое возникает при охлаждении свободной границы. В этом случае возникает продольный поток тепла внутри слоя, направленный к оси симметрии.

Рассмотрим второй случай, когда вне пограничного слоя задан внешний поток. При численном интегрировании системы (7), (8) параметр  $\tau$  был зафиксирован, а параметр  $U$  изменялся. На рис. 2 изображен график изменения радиальной компоненты скорости на свободной границе  $\Gamma$  в зависимости от значения скорости внешнего течения  $U$  на этой границе. Для всех полученных решений окружная компонента скорости отсутствует. Пунктирная кривая соответствует значению  $\tau = -0,75$ . В этом случае для каждого значения скорости внешнего потока  $U$  найдено только одно решение задачи (7), (8). С ростом скорости внешнего потока монотонно возрастает и скорость жидкости на свободной поверхности. Внутри области пограничного слоя при удалении от свободной поверхности скорость точек жидкости монотонно убывает и достигает асимптотических значений при выходе из области пограничного слоя. Профиль температуры внутри пограничного слоя изменяется с ростом радиальной координаты. Для  $r \leq r_2$  температура монотонно убывает при удалении от свободной границы. При  $r > r_2$  в профиле температуры имеется точка локального максимума. Отметим, что  $r_2 \approx 0,7978a$  при  $U = 1$ .

Сплошная линия на рис. 2 соответствует значению  $\tau = 0,75$ . Отметим, что теперь, при охлаждении свободной границы, решения вида (2) существуют только тогда, когда скорость внешнего потока на свободной границе превышает некоторое предель-

ное значение  $U > U_*$ . Для  $\tau = 0,75$  это значение равно  $U_* \approx 0,2488$ . При численном расчете для каждого  $U > U_*$  найдено по два решения, которые отличаются друг от друга формой профиля скорости. Для всех точек сплошной кривой, лежащих ниже оси абсцисс, т.е. при  $V_r < 0$ , имеются зоны тока и противотока, причем зона противотока расположена вблизи свободной границы. Здесь жидкость течет к оси симметрии. Вне этой зоны скорость жидкости и скорость внешнего потока однонаправлены. Для точек сплошной кривой, у которых  $V_r > 0$ , зона противотока отсутствует. Отметим, что существуют три вида профилей температуры для различных значений параметра  $U$  и координаты  $r$ . Внутри пограничного слоя температура изменяется с ростом поперечной координаты  $\eta$  либо монотонно, либо имеет одну или две точки локального экстремума.

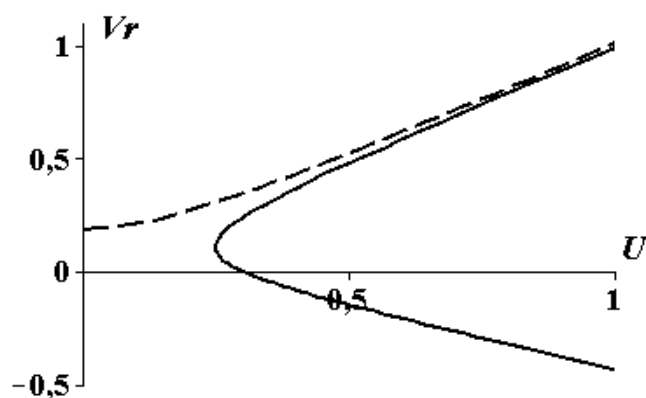


Рис. 2. Зависимость радиальной компоненты скорости на поверхности  $\Gamma$  от параметра  $U$

### Заключение

Рассмотрена стационарная осесимметричная задача о термогравитационном течении неоднородной жидкости в пограничном слое вблизи свободной границы. Показано, что в пограничном слое в случае охлаждения свободной поверхности вблизи оси симметрии могут возникать два автомодельных режима с вращением жидкости или два режима без вращения. При нагреве этой границы возникает только один режим без вращения жидкости.

### Литература

1. *Napolitano L.G.* Marangoni boundary layers // Proceedings III European Symposium on Material Science in Space. Grenoble, 1979. P. 313 – 315.

2. Пухначев В.В. Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1061 – 1064.

3. Шкадов В.Я. К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С. 133 – 137.

4. Батищев В.А., Хорошунова Е.В. Возникновение вращательных режимов при термокапиллярном течении неоднородной жидкости в слое // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 560 – 568.

5. Батищев В.А. Автомодельные решения, описывающие нестационарные термокапиллярные течения жидкости // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 6. С. 1003 – 1009.

6. Батищев В.А. Ветвление автомодельных решений, описывающих термокапиллярные течения жидкости в тонком слое // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 3. С. 137 – 143.

7. Батищев В.А. Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 425 – 432.

#### References

1. Napolitano L.G. Marangoni boundary layers. *Proceedings III European Symposium on Material Science in Space*. Grenoble, 1979, pp. 313-315.

2. Pukhnachev V.V. Gruppovoi analiz uravnenii nestatsionarnogo pogrannichnogo sloya Marangoni [Group analysis of equations of unsteady boundary layer

Marangoni]. *Dokl. AN SSSR*, 1984, vol. 279, no 5, pp. 1061-1064.

3. Shkadov V.Ya. K obrazovaniyu voln na poverkhnosti vyazkoi tyazheloi zhidkosti pod deistviem kasatel'nogo napryazheniya [By the formation of waves on the surface of a heavy viscous liquid under the influence of shear stress]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1970, no 3, pp. 133-137.

4. Batishchev V.A., Khoroshunova E.V. Vozniknovenie vrashchatel'nykh rezhimov pri termokapillyarnom techenii neodnorodnoi zhidkosti v sloe [The emergence of rotational modes when thermocapillary flow in non-uniform fluid layer]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2000, vol. 64, no 4, pp. 560-568.

5. Batishchev V.A. Avtomodel'nye resheniya, opisyyvayushchie nestatsionarnye termokapillyarnye techeniya zhidkosti [Self-similar solutions describing unsteady fluid flow thermocapillary]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1995, vol. 59, no 6, pp. 1003-1009.

6. Batishchev V.A. Vetvlenie avtomodel'nykh reshenii, opisyyvayushchikh termokapillyarnye techeniya zhidkosti v tonkom sloe [Branching-similar solutions describing thermocapillary fluid flow in a thin layer]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1999, vol. 40, no 3, pp. 137-143.

7. Batishchev V.A. Asimptotika neravnomerno nagretoi svobodnoi granitsy kapillyarnoi zhidkosti pri bol'shikh chislakh Marangoni [The asymptotic behavior of the free boundary is unevenly heated capillary fluid with large Marangoni numbers]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1989, vol. 53, no 3, pp. 425-432.



УДК 539.3

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-35-40

**О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГО ОПЕРТЫМ КРАЕМ\***

© 2016 г. А.О. Ватульян, О.А. Потетюнко

Ватульян Александр Ованесович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090; заведующий отделом дифференциальных уравнений, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, 362027, e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru

Vatulyan Aleksandr Ovanesovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of the Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Head of Differential Equation Division, Southern Institute of Mathematics of Vladikavkaz Scientific Center RAS, Marcus St., 22, Vladikavkaz, 362027, Russia, e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru

Потетюнко Ольга Андреевна – студент, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: ol\_potet73@mail.ru

Potetyunko Olga Andreevna – Student, Department of the Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: ol\_potet73@mail.ru

Рассмотрена задача об определении перемещений и резонансных частот собственных колебаний круглой пластины переменной жесткости с различными граничными условиями. Задача сведена к краевой задаче для дифференциального оператора четвертого порядка с переменными коэффициентами и решена численно методом Рунца. Определены собственные частоты и формы колебаний, прогиб пластинки на заданной частоте. Решена обратная задача об определении коэффициентов жесткости на краю на основе различных подходов: с помощью измерения прогиба в некоторых точках и на основе измерения набора резонансных значений.

**Ключевые слова:** пластина, неоднородность, колебания, упругое закрепление, метод Рунца, реконструкция.

The problem of determining the displacement and the resonance frequencies of the natural oscillations of a circular plate of variable stiffness with different boundary conditions is considered. The problem is reduced to a boundary value problem for the fourth-order differential operator with variable coefficients and solved numerically with the Ritz method. The natural frequencies and mode shapes, plate deflection at a given frequency was determined. The inverse problem of determining the coefficients of stiffness at the edge based on different approaches was solved. The first approach is based on deflection measurements at certain points; the second one is based on measuring the resonance values set.

**Keywords:** plate, heterogeneity, vibrations, elastic fixation, the Ritz method, reconstruction.

Пластины широко применяются в различных областях современной техники – строительном деле, авиастроении, ядерных установках и т.д. Однако модели, основанные на гипотезе однородности, оказываются недостаточно адекватными для описания динамического поведения объектов, исследуемых в таких областях, как, например, геофизика и биомеханика. Кроме того, оценка влияния упругости закрепления неоднородной пластины важна в различных приложениях в технике, а также в биомеханике для изучения заднего отдела склеры, моделируемого пластиной переменной жесткости [1]. На деформативность такого объекта существенное влияние оказывают коэффициенты жесткости, характеризующие упругость склеры. Определение этих коэффициентов позволяет как уточнить модель деформирования решетчатой пластины, так и

проводить более точно оценку величины внутриглазного давления. Поставленная задача относится к обратным задачам, которым присуща некорректность в той или иной форме [2, 3].

К настоящему моменту изучены задачи реконструкции граничных условий для различных упругих тел [4]. Одной из наиболее значимых работ является [5], где описаны математические модели для диагностирования параметров закрепления различных объектов по собственным частотам и исследована корректность соответствующих задач. Решены различные задачи восстановления параметров для стержней [6], мембран [7]. Подобная задача об отыскании вида закрепления круговой пластины, недоступного для непосредственного наблюдения, по собственным частотам ее осесимметричных изгибных колебаний решена в [8], причем определя-

\*Работа выполнена при частичной поддержке проекта «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур» (в рамках программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования»).

ется лишь тип закрепления пластины, но не параметры закрепления, для пластины постоянной жесткости на основе явного вида частотного уравнения. Для пластины переменной жесткости этого осуществить нельзя.

В настоящей работе рассматривается задача об определении перемещений и резонансных частот собственных колебаний круглой упругой пластины переменной жесткости с различными граничными условиями, в том числе упругого опирания. При этом изгибная жесткость пластины считается функцией радиальной координаты. Задача сведена к краевой задаче для дифференциального оператора четвертого порядка с переменными коэффициентами и решена численно методом Рунге. Определены собственные частоты и формы колебаний, а также прогиб пластины на заданной частоте. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода Рунге, с известным аналитическим решением для однородной круглой пластины в статике. Решена обратная задача об определении коэффициентов жесткости на краю на основе различных подходов. Первый основан на измерении прогиба в некоторых точках, второй – на измерении резонансных частот. Проведен ряд вычислительных экспериментов по определению прогиба упругой опертной пластины переменной жесткости и коэффициентов упругости заделки.

### Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания круглой упругой пластины радиуса  $a$  переменной жесткости под действием распределенной нагрузки  $q$ . Полагаем, что цилиндрическая жесткость пластины  $D(\xi) = \frac{E(\xi)h^3}{12(1-\nu^2)}$  есть

функция радиальной координаты, где  $E(\xi)$  – модуль Юнга;  $h$  – толщина пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для описания колебаний использован вариационный подход, причем функционал Гамильтона – Остроградского в случае установившихся колебаний имеет вид, указанный в [9].

Будем моделировать колебания пластины с упругим опиранием на краю с помощью добавления некоторых пружин с жесткостями  $C_1$  и  $C_2$  соответственно, причем  $C_1$  характеризует жесткость пружины на вертикальное смещение,  $C_2$  – на поворот.

Потенциальная энергия этих пружин  $F_0[W] = \frac{1}{2}C_1W^2(a) + \frac{1}{2}C_2(W'(a))^2$ , где  $W = W(\xi)$  – функция поперечного прогиба пластины. Соответ-

ственно, общий функционал для упруго опертной пластины складывается из функционалов  $F[W]$  и  $F_0[W]$ :

$$F_1[W] = F_0[W] + F[W] = \frac{1}{2} \int_0^a D(\xi) [W''(\xi)]^2 + \left[ \frac{W'(\xi)}{\xi} \right]^2 + 2\nu \left[ \frac{W'(\xi)W''(\xi)}{\xi} \right] \xi d\xi - \int_0^a W(\xi)q_0(\xi)\xi d\xi - \frac{\rho\omega^2 h^4}{2} \int_0^a W^2(\xi)\xi d\xi + \frac{1}{2}C_1W^2(a) + \frac{1}{2}C_2(W'(a))^2.$$

Введем безразмерные параметры и переменные по формулам  $D(ar)D_0^{-1} = f(r)$ ,  $D_0 = \max D(\xi)$ ,  $w = aW$ ,  $\kappa^2 = \rho\omega^2 ha^4 D_0^{-1}$ ,  $g_1 = C_1 a^2 D_0^{-1}$ ,  $g_2 = C_2 D_0^{-1}$ ,  $q(r) = q_0(ar)a^{-3}$ ,  $r = \xi a^{-1}$ , где  $f(r)$  – безразмерная жесткость;  $\kappa$  – безразмерный спектральный параметр, связанный с частотой колебаний.

Безразмерный функционал для рассматриваемой задачи представим в виде

$$F^*[w] = \frac{1}{2} \int_0^1 f(r) \left\{ [w''(r)]^2 + \left[ \frac{w'(r)}{r} \right]^2 \right\} + 2\nu \left[ \frac{w'(r)w''(r)}{r} \right] r dr - \int_0^1 q(r)w r dr - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^1 w^2(r)r dr + \frac{g_1}{2} w^2(1) + \frac{g_2}{2} (w'(1))^2. \quad (1)$$

Используя необходимое условие экстремума [10], проварьируем функционал (1) и преобразуем выражение для первой вариации, интегрируя по частям. Далее, приравнявая к нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим уравнение колебаний

$$Lw = (fw''r)' - (fr^{-1}w')' + \nu[(fw')' - (fw'')] - \kappa^2 rw = qr \quad (2)$$

и соответствующие граничные условия

$$M_1 w = \left\{ (fw''r)' + fr^{-1}w' - \nu(fw')' + \nu fw'' \right\}_{r=1} = M_1^0 w + g_1 w \Big|_{r=1} = 0, \quad (3)$$

$$M_2 w = \left\{ fw''r + \nu fw' + g_2 w' \right\}_{r=1} = M_2^0 w + g_2 w' \Big|_{r=1} = 0.$$

Отметим, что уравнение (2) совпадает с приведенным в [9].

### Решение задачи с использованием метода Рунге

Поскольку оператор в (2) имеет переменные коэффициенты, аналитическое исследование задачи невозможно. Для нахождения  $w$  используем метод Рунге [11]. В соответствии с этим методом представим функцию прогиба в виде линейной комбинации

$$w(r) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(r), \quad (4)$$

где  $c_k$  – некоторые коэффициенты;  $\varphi_k$  – базисные функции, в качестве которых примем

$$\varphi_k(r) = r^{2(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Для нахождения параметров  $c_k$  подставим (4) в функционал (1) и, используя необходимое условие экстремума для (1), получим систему линейных уравнений с симметричной матрицей относительно неизвестных коэффициентов разложения  $c_k$

$$\sum_{k=1}^N c_k A_{km} = b_m, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_{km} = & \int_0^1 f(r) \left\{ \varphi_k''(r) \varphi_m''(r) + \frac{1}{r^2} \varphi_k'(r) \varphi_m'(r) + \right. \\ & \left. + \frac{V}{r} [\varphi_k''(r) \varphi_m'(r) + \varphi_m''(r) \varphi_k'(r)] \right\} r dr - \\ & - \kappa^2 \int_0^1 \varphi_k(r) \varphi_m(r) r dr + g_1 \varphi_m(1) \varphi_k(1) + g_2 \varphi_m'(1) \varphi_k'(1), \\ & b_m = \int_0^1 \varphi_m(r) q(r) r dr. \end{aligned}$$

Решая систему (6) и находя коэффициенты  $c_k$ , получим искомую функцию прогиба в виде (4). Отметим, что из условия  $\det A_{km} = 0$  могут быть найдены приближения к резонансным значениям пластины [12].

### Обратная задача

Сформулируем обратную задачу об определении параметров  $g_1$  и  $g_2$  по известному прогибу  $w(r_k) = \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Отыскание  $g_1$ ,  $g_2$  может быть осуществлено методом наименьших квадратов, однако в силу неквадратичности функционала невязки эта процедура приводит к вычислительным проблемам при реализации. Выясним структуру решения в зависимости от параметров  $g_1$ ,  $g_2$ . Представим прогиб пластины в виде

$$w = w_0 + C_1 w_1 + C_2 w_2, \quad (7)$$

где  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  – решения вспомогательных задач, не зависящих от  $g_1$ ,  $g_2$ :

$$1^\circ. Lw_0 = rq(r), \quad 2^\circ. Lw_1 = 0, \quad (8)$$

$$M_1^0 w_0 \Big|_{r=1} = 0, \quad M_1^0 w_1 \Big|_{r=1} = 0,$$

$$M_2^0 w_0 \Big|_{r=1} = 0, \quad M_2^0 w_1 \Big|_{r=1} = 1.$$

$$3^\circ. Lw_2 = 0, \quad M_1^0 w_2 \Big|_{r=1} = 1, \quad M_2^0 w_2 \Big|_{r=1} = 0.$$

В (8) оператор  $L$  определен в (2), а  $M_1^0$ ,  $M_2^0$  – операторы из краевых условий (3), не содержащие  $g_1$  и  $g_2$ . Решения всех задач  $1^\circ$ – $3^\circ$  могут быть по-

строены также методом Рунца. При этом соответствующий функционал имеет вид

$$\begin{aligned} F^0[w] = & \frac{1}{2} \int_0^1 f(r) \left[ w''(r) \right]^2 + \left[ \frac{w'(r)}{r} \right]^2 + \\ & + 2V \left[ \frac{w'(r) w''(r)}{r} \right] \Big|_0^1 r dr - a_0 \int_0^1 q(r) w(r) r dr - \\ & - \frac{\kappa^2}{2} \int_0^1 w^2(r) r dr + a_1 w(1) + a_2 w'(1). \end{aligned}$$

Краевые задачи  $1^\circ$ – $3^\circ$  можно сформировать соответствующим выбором параметров  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Задаче  $1^\circ$  соответствуют  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a_2 = 0$ ; задаче  $2^\circ$  –  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1$ ; задаче  $3^\circ$  –  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 0$ . Определим теперь  $C_1$  и  $C_2$  в (8) из условия, что  $w$  удовлетворяют краевой задаче

$$Lw = rq(r), \quad M_1^0 w + g_1 w \Big|_{r=1} = 0,$$

$$M_2^0 w + g_2 w \Big|_{r=1} = 0. \quad (9)$$

Из второго и третьего условий (9) получим систему, связывающую  $C_1$ ,  $C_2$  и  $g_1$ ,  $g_2$ :

$$C_1 g_1 w_1(1) + C_2 (1 + g_1 w_2(1)) = -g_1 w_0(1), \quad (10)$$

$$C_1 (1 + g_2 w_1'(1)) + C_2 g_2 w_2'(1) = -g_2 w_0'(1).$$

На основе (10) можно сформировать два подхода к реконструкции. В первом подходе на основе (7) составим систему уравнений относительно  $C_1$ ,  $C_2$

$$w(r_i) - w_0(r_i) = C_1 w_1(r_i) + C_2 w_2(r_i), \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

откуда, найдя из (11)  $C_1$ ,  $C_2$ , из (10) определяем искомые параметры  $g_1$ ,  $g_2$ . Во втором подходе из (10)  $C_1$ ,  $C_2$  находятся по формулам Крамера

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad \text{Прогиб в точках } r_i \text{ тогда выра-$$

жается следующим образом:

$$w(r_i) = w_0(r_i) + \frac{1}{\Delta} (\Delta_1 w_1(r_i) + \Delta_2 w_2(r_i)), \quad (12)$$

или, проводя несложные преобразования, получим

$$w(r_i) = \frac{a_0^i g_1 g_2 + a_1^i g_1 + a_2^i g_2 + a_3^i}{a_0 g_1 g_2 + a_1 g_1 + a_2 g_2 + 1}, \quad \text{где } a_0, a_1, a_2,$$

$a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i$  – известные коэффициенты.

Таким образом, из условий  $w(r_k) = \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  получаем относительно  $g_1$ ,  $g_2$  нелинейную систему, которая, вообще говоря, является переопределенной. Наиболее интересны ситуации при  $m = 2, 3$ . Так, при  $m = 2$  система имеет вид

$$b_0^1 g_1 g_2 + b_1^1 g_1 + b_2^1 g_2 + b_3^1 = 0, \quad (13)$$

$$b_0^2 g_1 g_2 + b_1^2 g_1 + b_2^2 g_2 + b_3^2 = 0.$$

В этом случае налицо неединственность решения задачи реконструкции, которую можно преодолеть, используя условие положительности ис-

комых параметров. Отметим, что при подходе к решению задачи, основанном на измерении резонансных частот, из условия  $\Delta = 0$  также получаем систему вида (13).

**Вычислительные эксперименты**

*Прямая задача.* Для проведения вычислительных экспериментов составлена программа для решения различных краевых задач (2), (3), (9) для пластины методом Ритца в среде Maple. Программа апробирована на задаче изгиба пластины с постоянной жесткостью в статике, которая имеет точное аналитическое решение [13]. Погрешность результатов, найденных с помощью метода Ритца, составила не более 4 %. Также исследована зависимость решения от числа координатных функций  $N$ . Установлено, что при  $N \geq 8$  первые два резонансных значения не изменяются.

Здесь и далее в расчетах принято  $\nu = 0,4$ .

Проведена серия расчетов по определению резонансных значений при различных величинах параметров  $g_1, g_2$ : 1)  $g_1 = g_2 = 10^4$ , что может моделировать жесткую заделку (1-й тип); 2)  $g_1 = 10^4$  – шарнирное опирание по контуру (2-й тип); 3)  $g_1 = g_2 = 10^{-4}$  – свободный край (3-й тип).

Кроме того, выбор параметров  $g_1 = 10^{-4}$ ,  $g_2 = 10^4$  моделирует плавающую заделку, однако в силу малого влияния коэффициента  $g_2$  полученные результаты качественно будут близки к 1-му типу. В таблице приведены численные значения собственных частот при различных типах закрепления и законах распределения цилиндрической жесткости  $D(r)$ : а)  $D(r) = 1$ ; б)  $D(r) = 1 + r^2$  (монотонно возрастающая функция); в)  $D(r) = e^{-r}$  (монотонно убывающая функция).

Отметим, что при весьма больших диапазонах изменения параметров  $g_1, g_2$  (8 порядков) резонансные значения меняются в диапазоне [3, 12,5].

На рис. 1 представлена зависимость  $w(0, \kappa)$  для первых двух типов заделки (штриховая линия – 1-й тип, точки – 2-й тип) и  $w(1, \kappa)$  – для третьего типа (сплошная линия).

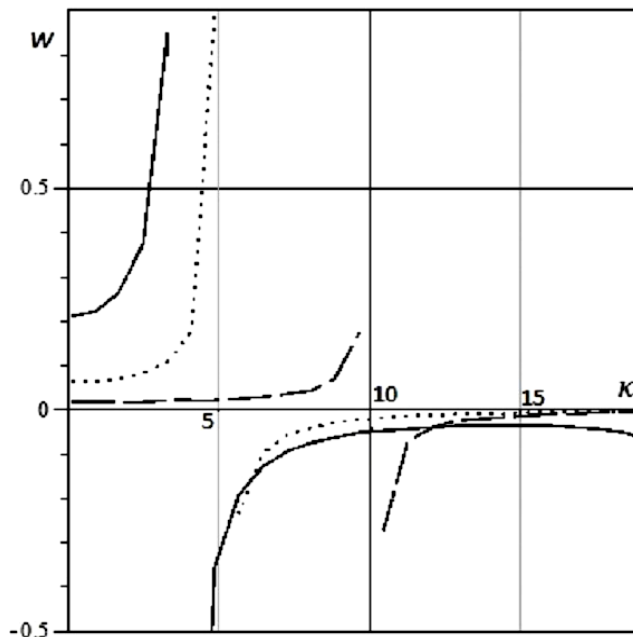


Рис. 1. Зависимость первого резонансного значения от условий закрепления

Нетрудно видеть, что резонансные значения для типа 1 превосходят значения для типов 2 и 3.

На рис. 2 представлена зависимость первого резонансного значения от  $g_1, g_2$ .

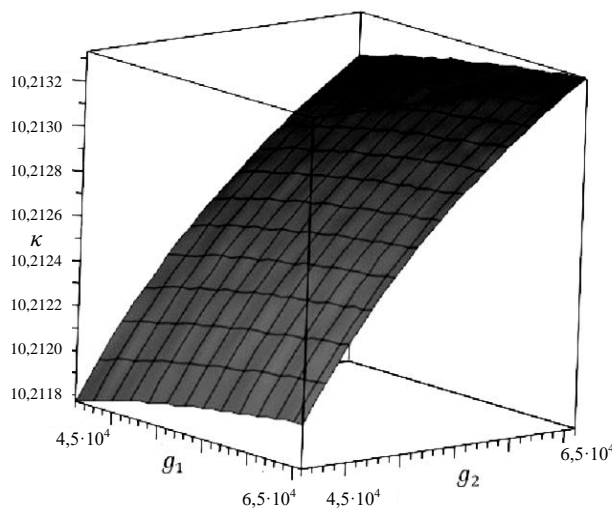


Рис. 2. Поверхность  $\kappa = \kappa(g_1, g_2)$

**Зависимости резонансных значений от закона неоднородности  $D(r)$  и параметров  $g_1, g_2$**

$D(r)$	$g_1 = g_2 = 10^4$			$g_1 = 10^4, g_2 = 10^{-4}$			$g_1 = g_2 = 10^{-4}$		
	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$
1	10,2126	39,7162	88,8136	5,0778	29,8178	74,1604	3,8500	21,2500	61,5500
$1+r^2$	12,3346	46,0320	101,8247	5,7570	34,068	84,530	4,1500	23,4500	69,5500
$e^{-r}$	7,4405	30,1597	68,2416	3,9568	22,9181	57,2254	3,2500	17,4500	49,7500

Из рис. 2 видно, что поверхность является весьма пологой; первое резонансное значение весьма мало меняется при достаточно широком диапазоне изменения  $g_1, g_2$ .

*Обратная задача.* При восстановлении параметров  $g_1, g_2$  задача решалась двумя описанными выше способами. В первом замеряется прогиб в двух точках, например, в точках 1 и 1/2. Восстановление происходило по двум схемам, описанным выше; во втором использованы два первых резонансных значения  $\kappa$ . При втором способе задача будет иметь два решения, одно из которых отсекается условием положительности параметров  $g_1, g_2$ .

Для понимания ситуации изобразим графики функций, входящих в (13), для  $g_1 = g_2 = 50$ . Нетрудно показать, что каждое из уравнений представляет собой гиперболу с асимптотами, параллельными осям координат, поскольку может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} b_0 g_1 g_2 + b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 = \\ = b_0 (g_1 - d_1)(g_2 - d_2) + d_3 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 3 представлены гиперболы, соответствующие уравнениям системы (13), причем крестиками обозначены точки пересечения – решения системы. Нетрудно видеть, что эта система имеет два решения, при этом одно из них может быть отброшено как не удовлетворяющее условию положительности ( $g_1 > 0, g_2 > 0$ ).

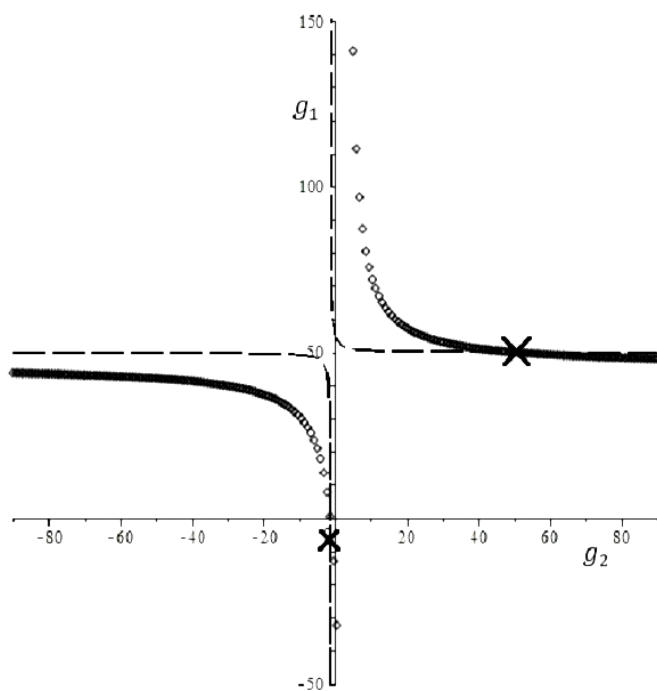


Рис. 3. Изображение гипербол, входящих в (13)

Сравнение восстановленных по замеру прогиба в двух точках значений  $g_1, g_2$  с исходным показало достаточную степень точности. При зашумлении исходных данных (прогибов) по закону  $w^*(\xi_i) = w(\xi_i)(1 + \varepsilon\theta)$ , где  $\varepsilon = 10^{-5}$ ;  $\theta$  – случайная функция с равномерным законом распределения на  $[-1, 1]$ ,  $g_1$  восстанавливается с погрешностью в тысячные доли процента,  $g_2$  –  $\sim 9\%$ .

## Заключение

На основе метода Ритца изучены задачи о деформировании и собственных колебаниях круглой упругой пластинки переменной жесткости с различными типами закрепления под действием равномерно распределенной нагрузки. Построены зависимости перемещений и резонансных значений от параметров закрепления. Приведены результаты вычислительных экспериментов для различных законов изменения жесткости. Определены с достаточной точностью коэффициенты жесткости на основе двух подходов.

## Литература

1. Математические модели и компьютерное моделирование в биомеханике / под ред. А.В. Зинковского и В.А. Пальмова. СПб., 2004. 516 с.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980. 286 с.
3. Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. Обратные и некорректные задачи. Ростов н/Д., 2011. 232 с.
4. Ватульян А.О., Ворович И.И., Соловьев А.Н. Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64, № 3. С. 373 – 380.
5. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М., 2009. 272 с.
6. Ватульян А.О., Васильев Л.В. Об определении параметров упругого закрепления неоднородной балки // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. 2015. № 3. С. 14 – 19.
7. Ахтямов А.М. Диагностика закрепления прямоугольной мембраны по собственным частотам ее колебаний // Акуст. журн. 2006. Т. 52, № 3. С. 293 – 296.
8. Ахтямов А.М. Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 325 – 331.
9. Аникина Т.А., Ватульян А.О., Углич П.С. Об определении переменной жесткости круглой пластины // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 6. С. 26 – 35.
10. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М., 1961. 228 с.

11. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970. 512 с.
12. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970. 734 с.
13. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1963. 635 с.

## References

1. *Matematicheskie modeli i komp'yuternoe modelirovanie v biomekhanike* [Mathematical models and computer simulations in biomechanics]. Ed. A.V. Zinkovskii, V.A. Pal'mov. Saint Petersburg, 2004, 516 p.
2. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* [Incorrect problems of mathematical physics and analysis]. Moscow, 1980, 286 p.
3. Vatul'yan A.O., Belyak O.A., Sukhov D.Yu., Yavruyan O.V. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and incorrect problems]. Rostov-on-Don, 2011, 232 p.
4. Vatul'yan A.O., Vorovich I.I., Solov'ev A.N. Ob odnom klasse granichnykh zadach v dinamicheskoi teorii uprugosti [On a class of boundary value problems in a dynamic elasticity theory]. *PMM*, 2000, vol. 64, no 3, pp. 373-380.
5. Akhtyamov A.M. *Teoriya identifikatsii kraevykh uslovii i ee prilozheniya* [The theory of identification of boundary conditions and its application]. Moscow, 2009, 272 p.

6. Vatul'yan A.O., Vasil'ev L.V. Ob opredelenii parametrov uprugogo zakrepleniya neodnorodnoi balki [Determination of the parameters of an inhomogeneous elastic securing beams]. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov ChES*, 2015, no 3, pp. 14-19.

7. Akhtyamov A.M. Diagnostika zakrepleniya pryamougol'noi membrany po sobstvennym chastotam ee kolebanii [Diagnosis of fixing rectangular membrane using natural frequencies of its oscillations]. *Akust. zhurn.*, 2006, vol. 52, no 3, pp. 293-296.

8. Akhtyamov A.M. Mozhno li opredelit' vid zakrepleniya koleblyushcheisya plastiny po ee zvuchaniyu? [Is it possible to determine the type of fastening of the vibrating plate in its sound?]. *Akust. zhurn.*, 2003, vol. 49, no 3, pp. 325-331.

9. Anikina T.A., Vatul'yan A.O., Uglich P.S. Ob opredelenii peremennoi zhestkosti krugloi plastiny [Determination of the circular plates of variable stiffness]. *Vychisl. tekhnologii*, 2012, vol. 17, no 6, pp. 26-35.

10. Gel'fand I.M., Fomin S.V. *Variatsionnoe ischislenie* [Calculus of variations]. Moscow, 1961, 228 p.

11. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, 1970, 512 p.

12. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemykh sistem* [Fluctuations of deformable systems]. Moscow, 1970, 734 p.

13. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plate and shell]. Moscow, 1963, 635 p.

УДК 512.622

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-41-46

## ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ ПОЛИНОМОВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ СТЕПЕНИ НАД ПРОСТЫМИ ПОЛЯМИ ГАЛУА

© 2016 г. В.М. Деундяк, А.В. Кнutowa

Деундяк Владимир Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090; старший научный сотрудник, ФГНУ НИИ «Спецвузавтоматика», пер. Газетный, 51, г. Ростов н/Д, 344002, e-mail: vlade@math.sfedu.ru

Deundyak Vladimir Mikhailovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Senior Researcher, NII «Specvuzavtomatika», Gazetnyi Lane, 51, Rostov-on-Don, 344002, Russia, e-mail: vlade@math.sfedu.ru

Кнutowa Анастасия Владимировна – студент, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: bubuzel@yandex.ru

Knutova Anastasiya Vladimirovna – Student, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: bubuzel@yandex.ru

Изучаются свойства производных по направлению от полиномов нескольких переменных над простыми полями Галуа. Рассмотрены системы полиномов первой и второй степени и найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости для них. Полиномы нескольких переменных над полями Галуа лежат в основе определения кодов Рида – Маллера, для которых в последние годы активно разрабатываются новые списочные и мягкие декодеры. Полученные результаты могут быть применены для оптимизации работы мягких декодеров типа декодера Сидельникова – Першакова для кодов Рида – Маллера второго и третьего порядка.

**Ключевые слова:** поля Галуа, производные полиномов, интегрируемость систем полиномов, коды Рида – Маллера, мягкое декодирование.

The properties of the derivatives in the direction of polynomials of several variables on simple Galois fields are studied. Necessary and sufficient conditions for integrability of the systems of the first and second degree polynomials are founded. The polynomials of several variables over Galois fields form the basis of the definition of the Reed-Muller codes, for which the new scheduled and soft-decision decoders are being actively developed in recent years. The results may be used to optimize the soft-decision decoders Sidelnikov-Pershakov type decoder for Reed-Muller second and third order codes.

**Keywords:** Galois fields, derivatives of polynomials, integrability of systems of polynomials, Reed-Muller codes, soft-decision decoding.

Полиномы нескольких булевых переменных и их производные в последние годы интенсивно изучаются в связи с задачами криптоанализа [1]. Систематическое изложение дифференциального исчисления для булевых полиномов содержится в [2]. В настоящее время в различных областях защиты информации применяются полиномы нескольких переменных над полями Галуа и их производные [3–6]. В настоящей работе изучаются свойства производных по направлению от полиномов нескольких переменных над простыми полями Галуа, найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости систем полиномов первой и второй степени. Эти результаты частично представлены в [7].

Полученные результаты могут быть применены для оптимизации работы мягких декодеров для кодов Рида – Маллера второго и третьего порядка [5, 6].

### Производная по направлению

Пусть  $p$  – простое число;  $F_p$  – поле Галуа;  $F_p^m$  – линейное пространство векторов длины  $m$  над полем  $F_p$ . В случаях, когда значение  $i$ -й координаты некоторого вектора из  $F_p^m$  равно  $\mu (\in F_p)$ , будем иногда вместо  $\mu$  писать  $\mu_i$ . Единичные векторы  $e = (0, \dots, 0, 1_i, 0, \dots, 0)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , составляют базис в  $F_p^m$ .

Пусть  $F_p[x_1, \dots, x_m]$  – алгебра полиномов от  $m$  переменных над полем  $F_p$ ,  $F_p^{(r)}[x_1, \dots, x_m] (\subseteq F_p[x_1, \dots, x_m])$  – подпространство полиномов степени не выше  $r$ . Каждый полином из  $F_p^{(r)}[x_1, \dots, x_m]$  можно записать в каноническом виде:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\rho(\mathbf{a}) \leq r} a_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = a_0 \mathbf{x}^0 + \sum_{\rho(\mathbf{a})=1} a_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} + \dots + \sum_{\rho(\mathbf{a})=r-1} a_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} + \sum_{\rho(\mathbf{a})=r} a_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ;  $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) (\in F_p^m)$ ;

$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}$ ;  $\rho(\mathbf{a})$  – сумма координат мультииндекса  $\mathbf{a}$  как натуральных чисел. Степень  $\deg(f)$  полинома  $f$ , записанного в каноническом виде, определяется как максимальная степень составляющих его ненулевых мономов. Полиномы, в мономы которых каждая переменная входит в степени не выше первой, образуют линейное подпространство пространства  $F_p^{(r)}[x_1, \dots, x_m]$ . Это подпространство связано с конструкцией тензорного произведения, и мы его будем обозначать  $F_{p, \otimes}^{(r)}[x_1, \dots, x_m]$ . Для полиномов от одной переменной с вещественными коэффициентами производная определяется через производные от мономов:  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ; таким же образом можно ввести производную полинома для любого поля. Аналогично определяются частные производные полиномов нескольких переменных для любого поля. Такие производные будем называть аналитическими.

В [1, с. 87] другим способом введено понятие производной по направлению от булевых полиномов. По аналогии определим производную по направлению для полинома из  $F_p[x_1, \dots, x_m]$ : производной полинома  $f (\in F_p[x_1, \dots, x_m])$  по направлению  $\mathbf{u} (\in F_p^m)$  называется полином вида

$$(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}).$$

**Лемма 1.** Соответствие  $f \mapsto D_{\mathbf{u}}f$ , где  $f \in F_p^{(r)}[x_1, \dots, x_m]$ ,  $\mathbf{u} \in F_p^m$ , задаёт линейный оператор  $D_{\mathbf{u}} : F_p^{(r)}[x_1, \dots, x_m] \rightarrow F_p^{(r-1)}[x_1, \dots, x_m]$ .

Отметим, что производная  $(D_{\mathbf{e}_i}f)$  от полинома  $f \in F_{p, \otimes}^{(r)}[x_1, \dots, x_m]$  совпадает с частной производной по переменной  $x_i$ .

### Критерий интегрируемости набора линейных функций

Будем рассматривать полиномы степени не выше двух и предполагать, что  $p > 2$ . Если  $f \in F_p^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$  то в силу (1)

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + f_{10\dots 0}x_1 + f_{010\dots 0}x_2 + \dots + f_{0\dots 01}x_m + f_{110\dots 0}x_1x_2 + f_{1010\dots 0}x_1x_3 + \dots + f_{0\dots 011}x_{m-1}x_m + f_{20\dots 0}x_1^2 + f_{020\dots 0}x_2^2 + \dots + f_{0\dots 02}x_m^2. \quad (2)$$

Приведём полином  $f$  к виду, принятому в теории квадратичных форм:

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \langle \mathbf{x}, (f_{100\dots 0}, \dots, f_{00\dots 01}) \rangle + \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}^T, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_{20\dots 0} & \frac{f_{110\dots 0}}{2} & \dots & \frac{f_{100\dots 01}}{2} \\ \frac{f_{110\dots 0}}{2} & f_{02\dots 0} & \frac{f_{010\dots 10}}{2} & \frac{f_{010\dots 01}}{2} \\ \vdots & \frac{f_{010\dots 10}}{2} & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{100\dots 01}}{2} & \frac{f_{010\dots 01}}{2} & \dots & f_{00\dots 02} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

**Лемма 2.** Пусть  $f$  – полином вида (3),  $\mathbf{b} \in F_p^m$ . Тогда  $(D_{\mathbf{b}}f)(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{b}^T + f(\mathbf{b}) - f_0$ .

*Доказательство.* Из (3) вытекает

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{b}) = f_0 + (\mathbf{x} + \mathbf{b}) \begin{pmatrix} f_{10\dots 0} \\ f_{01\dots 0} \\ \vdots \\ f_{0\dots 01} \end{pmatrix} + (\mathbf{x} + \mathbf{b}) \mathbf{A} (\mathbf{x} + \mathbf{b})^T.$$

Тогда из определения производной и симметричности матрицы  $\mathbf{A}$  получаем

$$(D_{\mathbf{b}}f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{b}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \begin{pmatrix} f_{10\dots 0} \\ f_{01\dots 0} \\ \vdots \\ f_{0\dots 01} \end{pmatrix} + \mathbf{b} \mathbf{A} \mathbf{x}^T + \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{b}^T + \mathbf{b} \mathbf{A} \mathbf{b}^T = 2\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{b}^T + f(\mathbf{b}) - f_0.$$

Рассмотрим задачу об условиях интегрируемости набора линейных функций. Пусть  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  – упорядоченный набор линейных функций. Найдём условия, при которых он является градиентом некоторого полинома  $f$  второго порядка, т.е.

$$\forall i \in \{1; \dots; m\} : D_{\mathbf{e}_i}f = \varphi^i. \quad (5)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  – упорядоченный набор функций вида

$$\varphi^i = \varphi_0^i + \varphi_{10\dots 0}^i x_1 + \varphi_{010\dots 0}^i x_2 + \dots + \varphi_{0\dots 01}^i x_m. \quad (6)$$

1. Если

$$\forall i, j \in \{1; \dots; m\} : \varphi_{0\dots 01, 0\dots 0}^i = \varphi_{0\dots 01, 0\dots 0}^j, \quad (7)$$

то можно построить полином  $f \in F_p^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$ , для которого выполняется (5). Если  $f, g$  из  $F_p^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$  удовлетворяют условию (5), то  $f - g \in F_p$ .

2. Если для набора  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  можно найти такой полином  $f \in F_p^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$ , что выполняются условия (5), то для этого набора выполняются условия (7).



**Доказательство.** 1. Проверим справедливость первого утверждения. Полином  $f$  будем искать в виде (2). Пусть  $f_0$  – произвольное число из  $F_p$ . Остальные коэффициенты, воспользовавшись (7), определим равенствами

$$\begin{cases} f_{0\dots 01_0\dots 01_0\dots 0} = \varphi_{0\dots 01_0\dots 0}^i = \varphi_{0\dots 01_0\dots 0}^j, \\ f_{0\dots 02_0\dots 0} = \frac{1}{2}\varphi_{0\dots 01_0\dots 0}^i, \\ f_{0\dots 01_0\dots 0} = \varphi_0^i - \frac{1}{2}\varphi_{0\dots 01_0\dots 0}^i. \end{cases} \quad (8)$$

Проверим выполнение условия (5). Рассмотрим производную по базисному вектору  $e_i$  от полинома  $f \in F_p^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$  вида (3) и преобразуем её с помощью леммы 2

$$\begin{aligned} (D_{e_i} f)(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{x}Ae_i^T + \langle e_i, (f_{100\dots 0}, \dots, f_{00\dots 01}) \rangle + e_i A e_i^T = \\ &= 2f_{0\dots 02_0\dots 0}x_i + f_{10\dots 01_0\dots 0}x_1 + \dots + f_{0\dots 01_{i-1}0\dots 0}x_{i-1} + \\ &+ f_{0\dots 01_{i+1}0\dots 0}x_{i+1} + \dots + f_{0\dots 01_0\dots 0m}x_m + f_{0\dots 01_0\dots 0} + f_{0\dots 02_0\dots 0} = \\ &= f_{0\dots 01_0\dots 0} + f_{0\dots 02_0\dots 0} + 2f_{0\dots 02_0\dots 0}x_i + \sum_{i \neq j} x_j f_{0\dots 01_0\dots 01_j0\dots 0}. \end{aligned}$$

В соответствии с (8) подставим в полученное выражение коэффициенты функции  $\varphi^i$ . Тогда

$$(D_{e_i} f)(\mathbf{x}) = \varphi_0^i + \varphi_{0\dots 01_0\dots 0}^i x_i + \sum_{i \neq j} x_j \varphi_{0\dots 01_0\dots 01_j0\dots 0}^i = \varphi^i.$$

Таким образом, условие (5) выполняется.

Пусть  $f, g$  из  $F_p^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$  удовлетворяют условию (5). Покажем, что в этом случае эти функции одинаковы с точностью до постоянного слагаемого. Рассмотрим производную по направлению  $e_i$  от функции  $h = f - g$

$$\begin{aligned} (D_{e_i} h)(\mathbf{x}) &= (D_{e_i} (f - g))(\mathbf{x}) = \\ &= (D_{e_i} f)(\mathbf{x}) - (D_{e_i} g)(\mathbf{x}) = \varphi^i - \varphi^i = 0. \end{aligned}$$

Это равенство выполняется для всех  $i$ . Нетрудно проверить, что это возможно лишь в том и только том случае, когда функция  $h$  является константой.

2. Рассмотрим набор  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  линейных функций вида (6) и такую функцию  $f \in F_p^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$ , что выполняются условия (5).

Проверим выполнение условия (7). Зафиксируем пару  $i, j$ , где для определённости  $i < j$ . Вычислим производные по базисным направлениям  $e_i, e_j$  и рассмотрим коэффициенты в них

$$\begin{aligned} (D_{e_i} f)(\mathbf{x}) &= f_{0\dots 01_0\dots 0} + f_{0\dots 02_0\dots 0} + 2f_{0\dots 02_0\dots 0}x_i + \\ &+ \sum_{k \neq i} x_k f_{0\dots 01_0\dots 01_k0\dots 0} = (f_{0\dots 01_0\dots 0} + f_{0\dots 02_0\dots 0} + \\ &+ 2f_{0\dots 02_0\dots 0}x_i) + \sum_{k \neq i, k \neq j} x_k f_{0\dots 01_0\dots 01_k0\dots 0} + x_j f_{0\dots 01_0\dots 01_j0\dots 0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_{e_j} f)(\mathbf{x}) &= f_{0\dots 01_0\dots 0} + f_{0\dots 02_0\dots 0} + 2f_{0\dots 02_0\dots 0}x_j + \\ &+ \sum_{k \neq i, k \neq j} x_k f_{0\dots 01_0\dots 01_k0\dots 0} + x_i f_{0\dots 01_0\dots 01_j0\dots 0}. \end{aligned}$$

Далее покажем, что свойство (7) следует из полученного вида производных по двум различным базисным векторам. Из условия (5) вытекает, что  $\forall i \in \{1, \dots, m\} : D_{e_i} f = \varphi^i$ .

Коэффициенты при  $x_i$  в  $(D_{e_j} f)(\mathbf{x})$  и  $x_j$  в  $(D_{e_i} f)(\mathbf{x})$  равны коэффициенту  $f_{0\dots 01_0\dots 01_j0\dots 0}$  исходного полинома  $f$ , следовательно, они равны между собой. Поэтому, в силу условия (5), соответствующие коэффициенты будут совпадать и в функциях из набора  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$ , т.е. для любой пары  $i, j$  выполняется равенство  $\varphi_{0\dots 01_0\dots 0}^i = \varphi_{0\dots 01_0\dots 0}^j$ . Таким образом, функции из набора  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  попарно удовлетворяют условиям (7).

**Замечание 1.** Рассмотрим интегрируемый набор  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  и вычисленный по нему интеграл  $f(x)$  вида (2) из доказательства теоремы 1, пункт 1. Тогда  $\varphi^i(x) = (D_{e_i} f)(\mathbf{x}) = 2f_{0\dots 02_0\dots 0}x_i +$

$$+ f_{0\dots 01_0\dots 0} + 2f_{0\dots 02_0\dots 0}x_i + \sum_{k \neq i} x_k f_{0\dots 01_0\dots 01_k0\dots 0}.$$

Используя найденные по формулам (8) коэффициенты  $f_{0\dots 02_0\dots 0}, f_{0\dots 01_0\dots 0}, f_{0\dots 01_0\dots 01_k0\dots 0}$ , можно восстановить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_{10\dots 0}^1}{2} & \frac{\varphi_{010\dots 0}^1}{2} & \dots & \frac{\varphi_{0\dots 01}^1}{2} \\ \frac{\varphi_{010\dots 0}^2}{2} & \frac{\varphi_{10\dots 0}^2}{2} & \dots & \frac{\varphi_{0\dots 01}^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi_{0\dots 01}^m}{2} & \frac{\varphi_{0\dots 01}^m}{2} & \dots & \frac{\varphi_{10\dots 0}^m}{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

и вектор коэффициентов при первой степени

$$\begin{pmatrix} f_{10\dots 0} \\ f_{01\dots 0} \\ \vdots \\ f_{0\dots 01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0^1 - \frac{\varphi_{10\dots 0}^1}{2} \\ \varphi_0^2 - \frac{\varphi_{010\dots 0}^2}{2} \\ \vdots \\ \varphi_0^m - \frac{\varphi_{0\dots 01}^m}{2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

из формул (3), (4).

**Замечание 2.** Пусть  $\{\varphi^i, \dots, \varphi^i\}$  – упорядоченный набор функций вида (6), где  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$ . Чтобы его можно было дополнить до интегрируемого набора  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$ , необходимо и достаточно, чтобы он не противоречил свойству (7). В этом случае можно описать алго-

ритм восстановления интегрируемой системы  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  по набору  $\{\varphi^i, \dots, \varphi^r\}$ : вначале заполняем симметричную матрицу  $A$  вида (4) известными коэффициентами в соответствии с (9); затем остальные элементы матрицы – произвольными числами, сохраняя симметричность. И наконец, вектор коэффициентов при первой степени (10) сначала заполняем известными коэффициентами, а после этого дополняем произвольными элементами. Ясно, что набор  $\{\varphi^i, \dots, \varphi^r\}$  дополняется до полного интегрируемого набора неоднозначно.

**Критерий интегрируемости систем полиномов второй степени**

Далее будем рассматривать полиномы  $g$  из  $F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$  вида

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = g_0 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{g}_{(1)} \rangle + \mathbf{xG}_{(2)}\mathbf{x}^T + g_{1110\dots 0}x_1x_2x_3 + g_{11010\dots 0}x_1x_2x_3 + g_{11010}x_1x_2x_4 + \dots + g_{0\dots 0111}x_{m-2}x_{m-1}x_m, \quad (11)$$

где  $\mathbf{g}_{(1)} \in F_p^m$ ,  $\mathbf{G}_{(2)}$  – матрица вида (4); свободный член  $g_0$  и коэффициенты при мономах третьей степени – элементы поля  $F_p$ . Под вектором вида  $(0\dots 01_i0\dots 01_j0\dots 01_k0\dots 0)$  в индексе будем понимать вектор веса три, у которого элементы под несовпадающими номерами  $i, j, k$  равны единице, а остальные – нулю.

Найдём производные  $g$  по базисным направлениям. Пусть  $g^*$  – сумма мономов, степень которых меньше трёх. Из леммы 1 вытекает, что

$$(D_{\mathbf{e}_i} g)(\mathbf{x}) = (D_{\mathbf{e}_i} g^*)(\mathbf{x}) + (D_{\mathbf{e}_i} (g - g^*))(\mathbf{x}) = g_{0\dots 01_i0\dots 0} + \sum_{i \neq j} x_j g_{0\dots 01_i0\dots 01_j0\dots 0} + g_{110\dots 01_i0\dots 0}x_1x_2 + \dots + g_{0\dots 01_i0\dots 011}x_{m-1}x_m.$$

Пусть  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  – упорядоченный набор полиномов из  $F_{p,\otimes}^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$ . Найдём условия, при которых он является градиентом некоторого полинома  $g$  из  $F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$ , т.е.

$$\forall i \in \{1; \dots; m\}: (D_{\mathbf{e}_i} g) = \varphi^i. \quad (12)$$

**Теорема 2.**

1. Пусть  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  – упорядоченный набор полиномов из  $F_{p,\otimes}^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$  вида

$$\varphi^i_0 + \varphi^i_{10\dots 0}x_1 + \varphi^i_{010\dots 0}x_2 + \varphi^i_{10\dots 01_{i-1}0\dots 0}x_{i-1} + \varphi^i_{10\dots 01_{i+1}0\dots 0}x_{i+1} + \varphi^i_{0\dots 01}x_m + \sum_{j,k \neq i, j \neq k} \varphi^i_{0\dots 01_j0\dots 01_k0\dots 0}x_jx_k \quad (13)$$

и для произвольных попарно неравных номеров  $i, j, k \in \{1; \dots; m\}$  выполняются условия

$$\varphi^i_{0\dots 01_j0\dots 0} = \varphi^j_{0\dots 01_i0\dots 0}, \quad (14)$$

$$\varphi^i_{0\dots 01_j0\dots 01_k0\dots 0} = \varphi^j_{0\dots 01_i0\dots 01_k0\dots 0} = \varphi^k_{0\dots 01_i0\dots 01_j0\dots 0}. \quad (15)$$

Тогда можно построить такой полином  $g$  из  $F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$ , что выполняется условие (12). Если полиномы  $f, g$  из  $F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$  удовлетворяют условию (12), то  $f - g \in F_p$ .

2. Если для набора  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  полиномов вида (13) можно найти такой полином  $g$  из  $F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$ , что выполняются условия (12), то справедливы равенства (14), (15).

*Доказательство.* 1. Полином  $g$  будем искать в виде (11). Пусть  $g_0$  – произвольное число из  $F_p$ . Остальные коэффициенты определим равенствами

$$\left\{ \begin{aligned} g_{0\dots 01_i0\dots 01_j0\dots 0} &= \varphi^i_{0\dots 01_j0\dots 0} = \varphi^j_{0\dots 01_i0\dots 0}, \\ g_{0\dots 02_i0\dots 0} &= \frac{1}{2} \varphi^i_{0\dots 01_i0\dots 0} = 0, \\ g_{0\dots 01_i0\dots 0} &= \varphi^i_0 - \frac{1}{2} \varphi^i_{0\dots 01_i0\dots 0} = \varphi^i_0, \\ g_{0\dots 01_i0\dots 01_j0\dots 01_k0\dots 0} &= \varphi^i_{0\dots 01_j0\dots 01_k0\dots 0} = \varphi^j_{0\dots 01_i0\dots 01_k0\dots 0} = \varphi^k_{0\dots 01_i0\dots 01_j0\dots 0}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Проверим выполнение условия (12). Рассмотрим линейные части полиномов из набора  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$ :

$$\varphi^{*i} = \varphi^i_0 + \varphi^i_{10\dots 0}x_1 + \varphi^i_{010\dots 0}x_2 + \varphi^i_{10\dots 01_{i-1}0\dots 0}x_{i-1} + \varphi^i_{10\dots 01_{i+1}0\dots 0}x_{i+1} + \varphi^i_{0\dots 01}x_m.$$

Тогда из теоремы 1 вытекает  $\forall i \in \{1; \dots; m\}: (D_{\mathbf{e}_i} g^*) = \varphi^{*i}$ .

Для кубической части  $g - g^*$  построим производную по произвольному направлению  $\mathbf{e}_i$

$$(D_{\mathbf{e}_i} (g - g^*))(\mathbf{x}) = g_{110\dots 01_i0\dots 0}x_1x_2 + \dots + g_{0\dots 01_i0\dots 011}x_{m-1}x_m.$$

По построению полинома  $g$

$$g_{110\dots 01_i0\dots 0} = \varphi^i_{110\dots 0}, \dots, g_{0\dots 01_i0\dots 011} = \varphi^i_{0\dots 011}.$$

Следовательно,

$$(D_{\mathbf{e}_i} (g - g^*))(\mathbf{x}) = \varphi^i_{110\dots 0}x_1x_2 + \dots + \varphi^i_{0\dots 011}x_{m-1}x_m = \varphi^i - \varphi^{*i}.$$

$$\text{Тогда } (D_{\mathbf{e}_i} g)(\mathbf{x}) = \varphi^{*i} + (\varphi^i - \varphi^{*i}) = \varphi^i.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 проверяется, что если для  $f, g$  из  $F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$  выполняются условия (12), то  $f - g \in F_p$ .

2. Покажем, что набор производных удовлетворяет условиям (14), (15). Из второй части теоремы 1, применённой к полиному  $g^*$  и набору его производных  $\{\varphi^{*1}, \dots, \varphi^{*m}\}$ , вытекает справедливость условия (14).

Рассмотрим теперь две производные полинома  $g - g^*$  по различным базисным направлениям. Зафиксируем пару  $i, j$ , где для определённости  $i < j$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^{*i} &= (D_{e_i}(g - g^*))(\mathbf{x}) \\ &= g_{110\dots 01_1 0\dots 0} x_1 x_2 \dots + g_{10\dots 01_1 0\dots 0} x_1 x_j + \\ &+ g_{010\dots 01_1 0\dots 0} x_2 x_j + \dots + g_{0\dots 01_{j-1} 0\dots 0} x_{j-1} x_j + \dots \\ &+ g_{0\dots 01_{j+1} 0\dots 0} x_{j+1} x_j + \dots + g_{0\dots 01_1 0\dots 0} x_j x_m, \\ \varphi^{*j} &= (D_{e_j}(g - g^*))(\mathbf{x}) = \\ &= g_{110\dots 01_1 0\dots 0} x_1 x_2 \dots + g_{10\dots 01_1 0\dots 0} x_1 x_j + \\ &+ g_{010\dots 01_1 0\dots 0} x_2 x_j + \dots + g_{0\dots 01_1 0\dots 0} x_j x_{j-1} + \dots \\ &+ g_{0\dots 01_1 0\dots 0} x_j x_{j+1} + \dots + g_{0\dots 01_1 0\dots 0} x_j x_m. \end{aligned}$$

Из полученных равенств вытекает справедливость (15).

**Теорема 3.**

1. Пусть  $\{\varphi^{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$  – набор из линейных функций вида

$$\varphi^{i,j} = \varphi_0^{i,j} + \varphi_{10\dots 0}^{i,j} x_1 + \varphi_{010\dots 0}^{i,j} x_2 + \dots + \varphi_{0\dots 01}^{i,j} x_m \quad (17)$$

и выполняются следующие условия:

1) для произвольных попарно неравных  $i, j, k \in \{1; \dots; m\}$

$$\begin{cases} \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{k,i} = \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{k,j} = \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{i,k} = \\ = \varphi_{0\dots 01_k 0\dots 0}^{i,j} = \varphi_{0\dots 01_k 0\dots 0}^{j,k} = \varphi_{0\dots 01_k 0\dots 0}^{j,i} \cdot \\ \varphi_{0\dots 0}^{k,i} = \varphi_{0\dots 0}^{i,k} \end{cases} \quad (18)$$

2) для произвольных неравных  $i, j \in \{1; \dots; m\}$

$$\varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{j,i} = \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{i,j} = 0; \quad \varphi^{i,i} \equiv 0. \quad (19)$$

Тогда можно построить такой набор полиномов  $\{f^k\}_{k=1,\dots,m}$  из  $F_{p,\otimes}^{(2)}[x_1, \dots, x_m]$ , что

$$\forall i, k \in \{1; \dots; m\} : (D_{e_i} f^k) = \varphi^{k,i}, \quad (20)$$

и такой полином  $g \in F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$ , что

$$\forall i \in \{1; \dots; m\} : D_{e_i} g = f^i. \quad (21)$$

2. Если для набора  $\{\varphi^{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$  полиномов вида (17) можно построить такой полином  $g \in F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$ , что

$$\forall i, j \in \{1; \dots; m\} : D_{e_j}(D_{e_i} g) = \varphi^{i,j}, \quad (22)$$

то выполняются равенства (18), (19).

*Доказательство.* 1. Для каждого  $k \in \{1, \dots, m\}$  набор  $\{\varphi^{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$  удовлетворяет условиям интегрируемости из теоремы 1 и является набором производных некоторого полинома второго порядка  $f^k$ , т.е. выполняется (20). Используя (8), (18), (19), вычисляем для полиномов  $f^k$  коэффициенты

$$\begin{aligned} f_{0\dots 01_1 0\dots 0}^k &= \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{k,i} = \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{k,i} = \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{i,k} = \\ &= \varphi_{0\dots 01_k 0\dots 0}^{j,i} = \varphi_{0\dots 01_k 0\dots 0}^{j,i} = \varphi_{0\dots 01_k 0\dots 0}^{j,i}, \\ f_{0\dots 01_1 0\dots 0}^k &= \varphi_{0\dots 0}^{k,i} - \frac{1}{2} \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{k,i} = \varphi_{0\dots 0}^{i,k} - \frac{1}{2} \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{i,k}, \\ f_{0\dots 02_1 0\dots 0}^k &= \frac{1}{2} \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{k,i} = \frac{1}{2} \varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{i,k} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} f_{0\dots 01_1 0\dots 0}^k &= f_{0\dots 01_k 0\dots 0}^i = f_{0\dots 1_1 0\dots 0}^j, \\ f_{0\dots 01_1 0\dots 0}^k &= f_{0\dots 01_k 0\dots 0}^i. \end{aligned}$$

Заметим, что построенный набор  $\{f^k\}_{k=1,\dots,m}$  удовлетворяет условиям из теоремы 2. Поэтому, используя (16), можно построить такой полином  $g \in F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$ , что выполняется условие (21).

2. Из теорем 1, 2 вытекает (18). Докажем справедливость утверждения (19). Рассмотрим  $D_{e_i}(D_{e_j} g)$ . Покажем, что в  $D_{e_i}(D_{e_j} g)$  невозможно содержание ненулевых мономов. В полиноме  $g$  каждый моном содержит переменную  $x_i$  в первой или нулевой степени. Так как производная  $(D_{e_i} f)$  от полинома  $f \in F_{p,\otimes}^{(r)}[x_1, \dots, x_m]$  совпадает с частной производной по переменной  $x_i$ , полином  $D_{e_j}(D_{e_i} g)$  тождественно равен нулю. Рассмотрим  $D_{e_j}(D_{e_i} g)$  и покажем, что в нём не может содержаться ненулевого коэффициента перед переменной  $x_i$ . Если  $\varphi_{0\dots 01_1 0\dots 0}^{j,i}$  ненулевой, значит, в исходной функции присутствует моном третьей степени, содержащий множители  $x_i^2$  и  $x_j$ . Но по определению  $F_{p,\otimes}^{(3)}[x_1, \dots, x_m]$  мы получаем противоречие, так как ни в один моном полинома  $g$  не входит переменная в степени выше первой.

В теоремах 1, 2 полиномы по наборам производных восстанавливаются неоднозначно. Аналогично полином  $g$  в первой части теоремы 3 по набору  $\{\varphi^{i,j}\}_{i,j=1}^m$  тоже определяется неоднозначно. Линейная часть  $g_0 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{g}_{(1)} \rangle$  этого полинома (11) определяется произвольным образом.

В [6] на основе модификации декодера Сидельникова – Першакова разработан декодер мягких решений для кодов Рида – Маллера второго порядка над полем  $F_3$ , где применяются производные по направлению для полиномов над  $F_3$ . Полученные в настоящей работе результаты предполагается применить для оптимизации этого декодера.

#### Литература

1. Логачёв О.А., Сальников А.А., Яценко В.В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. М., 2004. 469 с.
2. Бохманн Д., Постхоф Х. Двоичные динамические системы. М., 1986. 400 с.
3. Абросимов А.С. Свойства бент-функций  $q$ -значной логики над конечными полями // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 3. С. 50 – 60.
4. Логачёв О.А., Сальников А.А., Яценко В.В. Бент-функции на конечной абелевой группе // Дискретная математика. 1994. Т. 9, вып. 4. С. 3 – 20.
5. Сидельников В.М., Першаков А.С. Декодирование кодов Рида – Маллера при большом числе ошибок // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 28, № 3. С. 80 – 94.
6. Деундяк В.М., Могилевская Н.С. Модель троичного канала передачи данных с использованием декодера мягких решений кодов Рида – Маллера второго порядка // Изв. вузов. Сев.-кавк. регион. Техн. науки. 2015. № 1. С. 3 – 10.
7. Кнутова А.В. Об интегрируемости систем полиномов над полями Галуа // Молодёжный форум:

технические и математические науки : сб. науч. тр. по материалам междунар. молодёжной науч.-практ. конф., 9–12 ноября 2015. Воронеж, 2015. С. 289 – 292.

#### References

1. Logachev O.A., Sal'nikov A.A., Yashchenko V.V. *Bulevy funktsii v teorii kodirovaniya i kriptologii* [Boolean functions in coding theory and cryptology]. Moscow, 2004, 469 p.
2. Bokhmann D., Postkhof Kh. *Dvoichnye dinamicheskie sistemy* [Binary dynamic systems]. Moscow, 1986, 400 p.
3. Abrosimov A.S. Svoistva bent-funktsii  $q$ -znachnoi logiki nad konechnymi polyami [Properties of bent functions  $q$ -valued logic over finite fields]. *Diskretnaya matematika*, 1994, vol. 6, no 3, pp. 50-60.
4. Logachev O.A., Sal'nikov A.A., Yashchenko V.V. Bent-funktsii na konechnoi abelevoi grupe [Bent functions on a finite Abelian group]. *Diskretnaya matematika*, 1994, vol. 9, no. 4, pp. 3-20.
5. Sidel'nikov V.M., Pershakov A.S. Dekodirovanie kodov Rida – Mallera pri bol'shom chisle oshibok [Decoding of Reed - Muller codes with a large number of errors]. *Problemy peredachi informatsii*, 1992, vol. 28, no 3, pp. 80-94.
6. Deundyak V.M., Mogilevskaya N.S. Model' troichnogo kanala peredachi dannykh s ispol'zovaniem dekodera myagkikh reshenii kodov Rida – Mallera vtorogo poryadka [Model ternary data channel using the decoder soft decision Reed - Muller second order]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Tekhn. nauki*, 2015, no 1, pp. 3-10.
7. Knutova A.V. [On the integrability of systems of polynomials over Galois fields]. *Molodezhnyi forum: tekhnicheskie i matematicheskie nauki* [Youth Forum: technical and mathematical sciences]. Sat. scientific. tr. Materials Intern. youth scient.-pract. conf., November 9-12, 2015. Voronezh, 2015, pp. 289-292.

УДК 517.958:535.4

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-47-53

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ\*

© 2016 г. И.В. Донец, С.М. Цветковская

Донец Игорь Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей физики, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 5, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: ivdonets@rambler.ru

Donets Igor Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of General Physics, Southern Federal University, Zorge St., 5, Rostov-on-Don, Russia, 344090, e-mail: ivdonets@rambler.ru

Цветковская Светлана Мечиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344010, e-mail: tsvetkovskayas@mail.ru

Tsvetkovskaya Svetlana Mechislavovna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, Russia, 344010, e-mail: tsvetkovskayas@mail.ru

На основе метода возмущения исследованы нелинейные эффекты, появление которых обусловлено кубической нелинейностью диэлектрика при дифракции электромагнитной волны на многослойном диэлектрическом пакете. Расчет нелинейного отклика производится на основе функции Грина для многослойного диэлектрика. На координатных плоскостях «угол падения – длина волны» найдены резонансы генерирования третьей гармоники, а также резонансы нелинейного эффекта самовоздействия.

**Ключевые слова:** оптический диапазон, лазерные технологии, нелинейный диэлектрик, третья гармоника, функция Грина.

Investigation nonlinear phenomenon of electromagnetic wave diffraction by multilayer dielectric package concerned with dielectric cubic nonlinearity was ground on perturbation method. Computation of nonlinear response was made by Green function for multilayer dielectric package. There are found out resonances of third harmonic generation in coordinates «hade – wave length», also resonances of nonlinear influence for itself were found out.

**Keywords:** optical band, laser technology, nonlinear dielectric, third harmonic, Green function.

В оптическом диапазоне с мощными лазерными источниками света многие диэлектрики проявляют нелинейные свойства [1]. В работе [2] продемонстрирован многослойный метаматериал, обладающий повышенным нелинейным откликом. Даже при низкой интенсивности падающего оптического излучения в диапазоне 0,63 мкм в тонких пленках наблюдаются нелинейные эффекты [3]. В лазерной технологии материалы с нелинейными оптическими свойствами находят применение при изготовлении зеркал. Нелинейные зеркала, представляющие собой многослойные структуры из нелинейных оптических материалов, при генерации лазерного излучения дают выигрыш по некоторым выходным параметрам [4].

В данной работе методом, развитым для расчёта обобщенных многослойных нелинейных структур [5], исследованы многослойные нелинейные зеркала из новых перспективных материалов, оптические свойства которых рассмотрены в работе [6].

### Постановка задачи

Рассмотрим многослойный диэлектрический пакет (рис. 1). Диэлектрический слой  $i$  имеет

относительные диэлектрическую  $\varepsilon_i$  и магнитную  $\mu_i$  проницаемости, высоту  $h_i$ . Символы  $b_i$ ,  $t_{i+1}$  означают текущие координаты граничных поверхностей  $Y = const$  диэлектрических слоёв, координата  $b_i$  соответствует нижней границе  $i$ -слоя,  $t_{i+1}$  – верхней границе  $(i+1)$ -го слоя. Из верхнего полупространства падает плоская поляризованная электромагнитная волна:  $E_x = E_y = 0$ ,  $E_z = E$ .

Волновое уравнение запишем в виде  $\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \text{grad div } \mathbf{P}$ , где  $\frac{1}{v^2} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0$ ;  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  – векторы напряженности электрического поля и поляризации соответственно. С учетом геометрии задачи последнее уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (1)$$

\* Работа выполнена при поддержке внутреннего гранта Южного федерального университета 213.01.-07.2014/08 ПЧВГ.

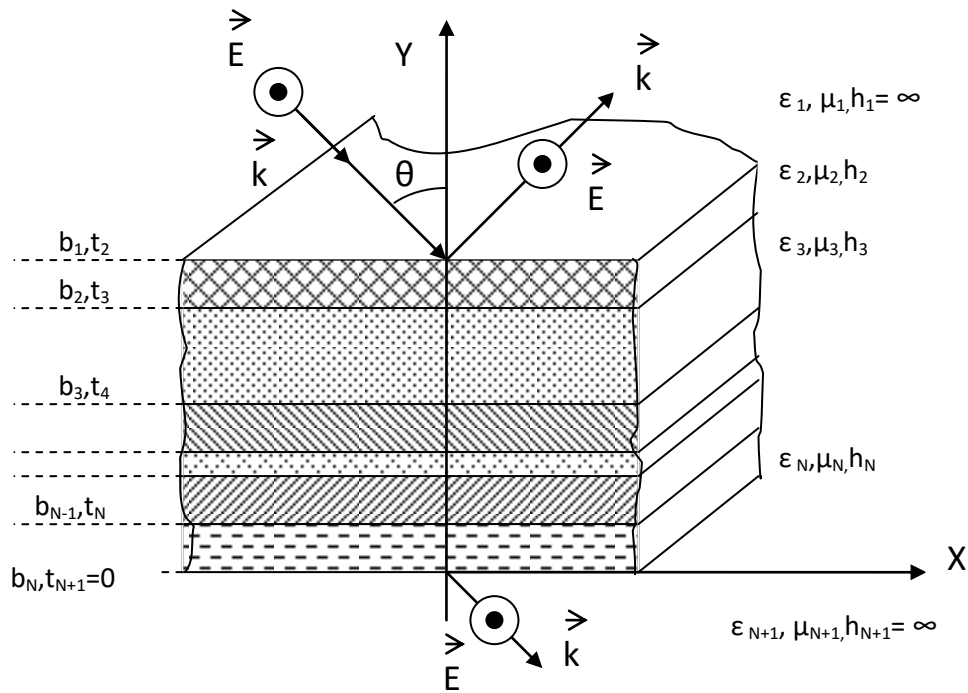


Рис. 1. Многослойный диэлектрический пакет

**Решение проблемы методом возмущения**

Сначала решаем однородное уравнение (1) при падении монохроматической волны с круговой частотой  $\omega$   $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 \mu \varepsilon E = 0$ .

Известное решение этой задачи обозначим как  $E_1(y)e^{i(\omega t - k_x x)}$ , где  $k_x = k\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \alpha$ ;  $\alpha$  – угол падения;  $\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$  – показатель преломления полубесконечного слоя, из которого падает волна; функция  $E_1(y)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{d^2 E_1}{d y^2} + (k^2 \mu \varepsilon - k_x^2) E_1 = 0$ , где  $E_1(y)$  означает напряженность поля основной гармоники.

Рассмотрим квадратичную нелинейность для каждого слоя  $P = \alpha |E|^2 E$ .

Вводим параметр нелинейности  $\alpha = \varepsilon_0 \hat{\alpha} |E_{nao}|^2$ ,  $\hat{\alpha}$  – нормированный параметр нелинейности. В первом приближении  $E \approx \frac{1}{2} (E_1 e^{i\varphi t} + E_1^* e^{-i\varphi t})$ , где  $\varphi = \omega t - k_x x$ .

Разделяя частоты, получим два неоднородных уравнения для волны на основной и утроенной частотах:

$$\frac{d^2 \hat{E}_{n,1}}{d y^2} + \kappa^2 \hat{E}_{n,1} = -E_1^2 E_1^* / |E_{nao}|^3, \tag{2}$$

$$\frac{d^2 \hat{E}_{n,3}}{d y^2} + \eta^2 \hat{E}_{n,3} = -E_1^3 / |E_{nao}|^3, \tag{3}$$

где  $\hat{E}_{n,1} = \frac{E_{n,1}}{\hat{\beta} |E_{nao}|}$ ;  $\hat{E}_{n,3} = \frac{E_{n,3}}{\hat{\beta} |E_{nao}|}$ ;  $E_{n,1}, E_{n,3}$  – нелинейное поле на основной и утроенной частотах;  $\kappa^2 = k^2 \mu \varepsilon - k_x^2$ ;  $\eta^2 = 9k^2 \mu \varepsilon - k_x^2$ ;  $\hat{\beta} = 9\mu\mu_0\varepsilon_0 \frac{\hat{\alpha}}{2} \omega^2 = \frac{9}{2\lambda} \mu \hat{\alpha}$ ;  $k, \lambda$  – волновое число и длина волны в вакууме на основной частоте.

Пусть известна функция Грина неоднородного уравнения Гельмгольца (2) [7]

$$\frac{\partial^2 g(y, y', \omega)}{\partial y^2} + \kappa^2 g(y, y', \omega) = -\delta(y - y'). \tag{4}$$

Функция Грина уравнения (3) –  $g(y, y', 3\omega)$ . Тогда решения уравнений (2), (3) будут иметь вид

$$\frac{E_{n,1, j}(y)}{|E_{nao}|} = \hat{\beta}_j \frac{1}{|E_{nao}|^3} \int_{y=b_j}^{t_j} E_1^2(y') E_1^*(y') g(y, y', \omega) dy', \tag{5}$$

$$\frac{E_{n,3, j}(y)}{|E_{nao}|} = \hat{\beta}_j \frac{1}{|E_{nao}|^3} \int_{y=b_j}^{t_j} E_1^3(y') g(y, y', 3\omega) dy', \tag{6}$$

где  $\frac{E_{n,1, j}(y)}{|E_{nao}|}$  и  $\frac{E_{n,3, j}(y)}{|E_{nao}|}$  – нормированные поля на

основной и утроенной частотах, вызванных нелинейным слоем с номером  $j$ , характеризуемым параметром нелинейности  $\hat{\beta}_j$ .

Общее поле вычисляется по формулам

$$\frac{E_{n,1}(y)}{|E_{na0}|} = \sum_j \frac{E_{n,1,j}(y)}{|E_{na0}|}; \quad \frac{E_{n,3}(y)}{|E_{na0}|} = \sum_j \frac{E_{n,3,j}(y)}{|E_{na0}|}.$$

Интегралы в (5), (6) можно вычислить аналитически или численно.

### Функция Грина

Функцию Грина представим в виде суммы двух функций  $g_v(y, y') = U_v(y, y') + V_v(y, y')$ .  $U_v(y, y')$  – частное решение неоднородного уравнения (4), которое удовлетворяет граничным условиям:

$$U_v(y'+0, y') = U_v(y'-0, y'), \quad U'_v(y'+0, y') - U'_v(y'-0, y') = -1,$$

$$U_v(b_v, y') = U_v(t_v, y') = 0,$$

$$U(y, y') \equiv 0 \text{ при } y \leq b_v, y \geq t_v;$$

$V_v(y, y')$  – общее решение однородного уравнения (4), которое непрерывно вместе со своей первой производной при  $y = y'$ .

Пусть источник расположен в слое с номером  $v$ . Нетрудно получить решения уравнения (4), удовлетворяющие этим граничным условиям:

$$U_v(y, y') = \frac{1}{k_v s_v(h_v)} \begin{cases} s_v(\tilde{y}') s_v(\tilde{y}), & h_v \geq \tilde{y} \geq \tilde{y}', \\ s_v(\tilde{y}') s_v(\tilde{y}), & 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{y}', \\ 0, & \tilde{y} \geq h_v, \tilde{y} \leq 0, \end{cases}$$

где  $\kappa_v^2 = k^2 \mu_v \varepsilon_v - k_x^2$ ;  $s_v(y) = \sin(\kappa_v y)$ ;

$$\tilde{y} = h_v - \tilde{y} = t_v - y, \quad \tilde{y} = y - b_v, \quad h_v = t_v - b_v.$$

$$\text{Для третьей гармоники } \kappa_v^2 = 9k^2 \mu_v \varepsilon_v - k_x^2.$$

Решение однородного уравнения Гельмгольца ищем в виде

$$V_v(y, y') = \begin{cases} a_v F_v^+(y), & \tilde{y} \geq h_v, \\ \frac{a_v s_v(\tilde{y}) + b_v s_v(\tilde{y}')}{s_v(h_v)}, & 0 \leq \tilde{y} \leq h_v, \\ b_v F_v^-(y), & \tilde{y} \leq 0, \end{cases}$$

где  $a_v, b_v$  – неизвестные коэффициенты.

Функция  $F_v^+(z)$  является решением уравнения Гельмгольца при  $y \geq t_v$ ,  $F_v^-(z)$  – при  $y \leq b_v$ . Кроме того, потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли граничным условиям:  $F_v^+(t_v) = 1, F_v^-(b_v) = 1$ .

В этом случае функции  $g_v(z, z') = U_v(y, y') + V_v(y, y')$  непрерывны на границах  $v$ -го диэлектрика  $y = b_v, y = t_v$ .

Введенная функция Грина удовлетворяет всем граничным условиям, кроме условия непрерывности  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial g_v(y, y')}{\partial y}$ . Удовлетворим этому условию и найдем неизвестные коэффициенты  $a_v(y'), b_v(y')$ .

$$a_v = C_v [Q_v s_v(\tilde{y}') + \varphi_v^- s_v(\tilde{y}')],$$

$$b_v = C_v [\varphi_v^+ s_v(\tilde{y}') + Q_v s_v(\tilde{y}')], \tag{7}$$

$$\text{где } C_v = \frac{1}{(\varphi_v^+ \varphi_v^- - Q_v^2) \mu_v s_v(h_v)},$$

$$\varphi_v^+ = -\frac{[F_v^+(y=t_v)]'}{\mu_{v-1}} + T_v, \quad \varphi_v^- = \frac{[F_v^-(y=b_v)]'}{\mu_{v+1}} + T_v$$

(штрих означает производную по  $y$ ),

$$T_v = \frac{k_v}{\mu_v} \text{ctg}_v(h_v), \quad Q_v = \frac{k_v}{\mu_v s_v(h_v)}.$$

Найдём решение однородного уравнения Гельмгольца вне слоя с источником функции  $F_v^\pm(y)$ .

Введем обозначение:  $F_v^\pm(y) \equiv \bar{F}_{\eta v}^\pm(y)$  при  $y$ , лежащей в  $\eta$ -м слое.

Решение ищем в виде  $1 < \eta \leq N_s$  (в диэлектрических слоях, кроме полубесконечных),  $\eta \neq v$ ,

$$\bar{F}_{\eta v}^+(y) = \frac{B_{\eta, v}^+ s_\eta(y - b_\eta) + D_{\eta, v}^+ s_\eta(t_\eta - y)}{s_\eta(h_\eta)}, \quad 1 < \eta < v;$$

$$\bar{F}_{\eta v}^-(y) = \frac{B_{\eta, v}^- s_\eta(y - b_\eta) + D_{\eta, v}^- s_\eta(t_\eta - y)}{s_\eta(h_\eta)}, \quad v < \eta \leq N;$$

где  $s_\eta(y) = \sin(\kappa_\eta y)$ ,

$$\text{при } \eta = 1: \quad \bar{F}_{\eta v}^+(y) = C_v^+ \exp[-jk_\eta(y - b_\eta)],$$

$$\text{при } \eta = N + 1: \quad \bar{F}_{\eta v}^-(y) = C_v^- \exp[jk_\eta(y - b_{\eta-1})].$$

Неизвестные  $B_{\eta, v}^\pm, D_{\eta, v}^\pm, C_v^\pm$  найдем из граничных условий. На границах раздела диэлектриков непрерывны функции  $F_v^\pm(y)$  и  $\frac{1}{\mu} [F_v^\pm(y)]'$ . В результате получим

$$\bar{F}_{\eta v}^+(y) = \begin{cases} C_v^+ \exp[-jk_\eta(y - b_\eta)], & \eta = 1 \\ \frac{B_{\eta, v}^+ s_\eta(y - b_\eta) + B_{\eta+1, v}^+ s_\eta(t_\eta - y)}{s_\eta(h_\eta)}, & 1 < \eta < v \end{cases},$$

$$\bar{F}_{\eta v}^-(y) = \begin{cases} C_v^- \exp[jk_\eta(y - b_{\eta-1})], & \eta = N + 1 \\ \frac{D_{\eta-1, v}^- s_\eta(y - b_\eta) + D_{\eta, v}^- s_\eta(t_\eta - y)}{s_\eta(h_\eta)}, & v < \eta \leq N \end{cases}.$$

Рекуррентные формулы:

$$0 = -B_{\tau,\nu}^+ Q_{\tau} + B_{\tau+1,\nu}^+ (T_{\tau} + T_{\tau+1}) - B_{\tau+2,\nu}^+ Q_{\tau+1}, \quad \tau = 1, \dots, \nu - 2;$$

$$0 = -D_{\tau-1,\nu}^- Q_{\tau} + D_{\tau,\nu}^- (T_{\tau} + T_{\tau+1}) - D_{\tau+1,\nu}^- Q_{\tau+1},$$

$$\tau = \nu + 1, \nu + 2, \dots, N, \quad B_{1,\nu}^+ = 0, \quad B_{2,\nu}^+ = C_{\nu}^+, \quad (8)$$

$$B_{\nu,\nu}^+ = 1, \quad T_{\nu} = \frac{k_{\nu}}{\mu_{\nu}} \operatorname{ctg}_{\nu}(h_{\nu}), \quad Q_{\nu} = \frac{k_{\nu}}{\mu_{\nu} s_{\nu}(h_{\nu})}, \quad T_1 = jk_1, \quad Q_1 = 0,$$

$$D_{N+1,\nu}^- = 0, \quad D_{N,\nu}^- = C_{\nu}^-, \quad D_{\nu,\nu}^- = 1, \quad T_{N+1} = jk_{N+1},$$

$$Q_{N+1} = 0. \quad (9)$$

### Коэффициенты отражения и прохождения

Получим коэффициенты отражения и прохождения падающей волны как на основной, так и на утроенной частотах. Они вводятся как отношение мощностей отраженной или прошедшей через слоистую структуру волны на соответствующей частоте.

$$\frac{E_{n,1}(y)}{|E_{na0}|} = \begin{cases} \hat{\rho}_{n1} \exp(-ik_1(1)y), & y \geq b_1, \\ \hat{\tau}_{n1} \exp(ik_{N+1}(1)y), & y \leq 0 \end{cases}, \quad (10)$$

$$\frac{E_{n,3}(y)}{|E_{na0}|} = \begin{cases} \hat{\rho}_{n3} \exp(-ik_1(3)y), & y \geq b_1, \\ \hat{\tau}_{n3} \exp(ik_{N+1}(3)y), & y \leq 0 \end{cases}.$$

$$\hat{\rho}_{n1} = \frac{\exp(ik_1(1)b_1)}{|E_{na0}|^3} \sum_j \hat{\beta}_j C_j^+(\omega) \int_{y=b_j}^{t_j} E_1^2(y') E_1^*(y') a_j(y', \omega) dy', \quad (11)$$

$$\hat{\tau}_{n1} = \frac{1}{|E_{na0}|^3} \sum_j \hat{\beta}_j C_j^-(\omega) \int_{y=b_j}^{t_j} E_1^2(y') E_1^*(y') b_j(y', \omega) dy',$$

$$\hat{\rho}_{n3} = \frac{\exp(ik_1(3)b_1)}{|E_{na0}|^3} \sum_j \hat{\beta}_j C_j^+(3\omega) \int_{y=b_j}^{t_j} E_1^3(y') a_j(y', 3\omega) dy',$$

$$\hat{\tau}_{n3} = \frac{1}{|E_{na0}|^3} \sum_j \hat{\beta}_j C_j^-(3\omega) \int_{y=b_j}^{t_j} E_1^3(y') b_j(y', 3\omega) dy'.$$

### Результаты моделирования

Написанное программное обеспечение может быть использовано для пакета с произвольным количеством нелинейных диэлектрических слоев.

В процессе моделирования вычислялись выражения (11), входящие в (10) и описывающие коэффициенты отражения и прохождения падающей волны на основной и утроенной частотах. Используемые в (11) функции  $a_j, b_j$  вычисляются по соотношениям (7), коэффициенты  $C_j^+, C_j^-$  – (8),

(9). Функция  $E_1$  является решением дифракции электромагнитной волны на исследуемой структуре в пренебрежении нелинейными добавками (обычная дифракция). Процесс получения этой функции здесь не описывается.

Была промоделирована структура, состоящая из 13 пар чередующихся слоев YSZ ( $n=2,15$ ) и 1% AZO ( $n=1,83$ ). Остальные параметры структуры:  $N=27$ ,  $\varepsilon_1=1$  – верхний полубесконечный слой;  $\varepsilon_{N+1}=2,1$  – нижний полубесконечный слой (подложка). Значения показателей преломления взяты для длины волны  $\lambda_0=633$  нм. Профиль структуры представлен на рис. 1. Значение реальной части нормированного параметра нелинейности для 1% AZO –  $\hat{\alpha} = (0,1257 + i0,0357) \cdot 10^{-9}$  [6].

На рис. 2–6 показаны поверхности коэффициентов отражения и прохождения структуры, состоящей из 13 пар чередующихся слоев YSZ ( $n=2,15$ ) и 1% AZO ( $n=1,83$ ), построенные в координатах: нормированная длина волны  $\frac{\lambda}{\lambda_0}$  (ось X) – угол падения (ось Y).

Значения показателей преломления взяты для длины волны  $\lambda_0=633$  нм. Все слои (кроме полубесконечных) имеют толщины, равные  $5 \frac{\lambda_0}{4 n_i}$ , где  $n_i$  – показатель преломления соответствующего слоя.

На рис. 2 приведены данные для коэффициента прохождения линейной задачи  $\tau_l$ . Следует учесть, что поверхности для линейного коэффициента отражения  $\rho_l$  могут быть найдены из соотношения  $\rho_l = 1 - \tau_l$ . На рис. 3–6 приведены поверхности нелинейных коэффициентов отражения и прохождения основной гармоники (рис. 3, 4) и третьей гармоники (рис. 5, 6). Масштаб логарифмический – 20  $\log_{10}$ .

Из рисунков видно, что величины нелинейных эффектов (самовоздействие (рис. 3, 4), генерация третьей гармоники (рис. 5, 6)) существенно зависят от соотношения угла падения возбуждающей волны и длины волны. Исследуемая структура выбрана из расчета максимального отражения падающей под нулевым углом волны на центральной длине волны 633 нм (рис. 2).

Из рис. 3, 4 также следует, что максимальное отражение падающей волны наблюдается в целой области, начинающейся вблизи нулевого угла и единичной нормированной частоты и продолжающейся в сторону уменьшения длины волны и увеличения угла. Область отражения представляет собой полосу, сужающуюся в сторону уменьшения нормированной частоты. По краям области происходит резкий резонансный эффект перехода от отражения к пропусканию структурой падающей волны. Именно в этом узком интервале перехода от отражения к пропусканию структурой происходит максимальная генерация нелинейных компонент (рис. 3–6). Интенсивности «отраженной» и «прошедшей» третьей гармоники – это величины одного порядка (рис. 5, 6).



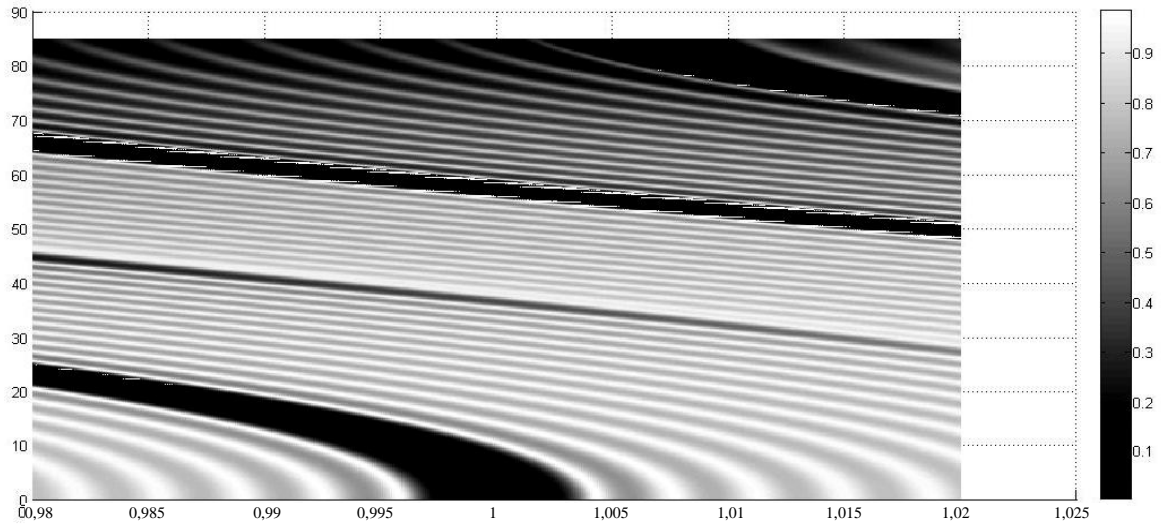


Рис. 2. Поверхности линейного коэффициента прохождения

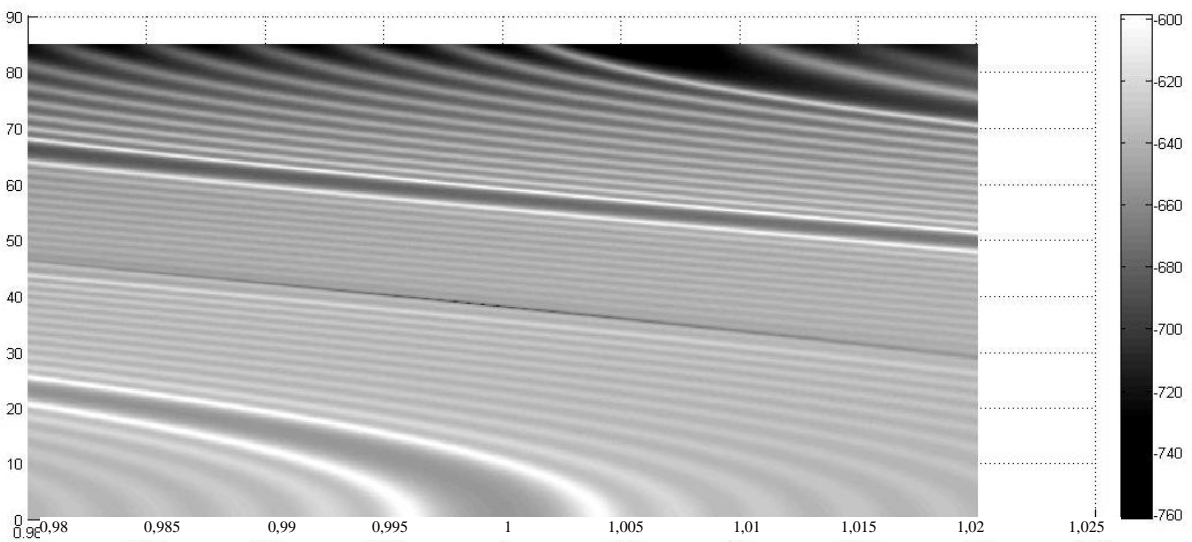


Рис. 3. Поверхности нелинейного коэффициента отражения основной гармоники  $\hat{\rho}_{n1}$

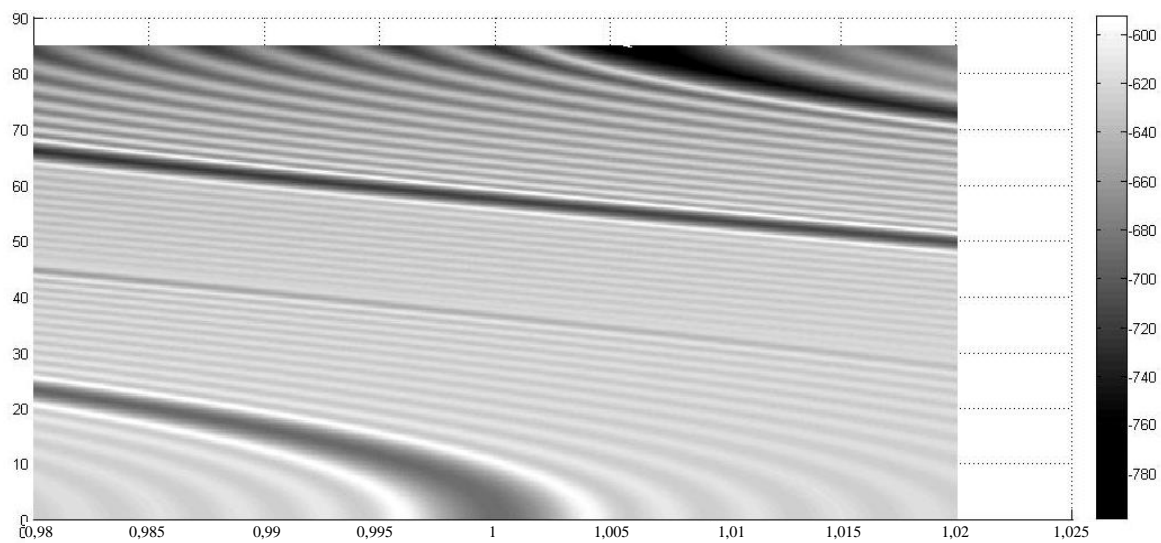
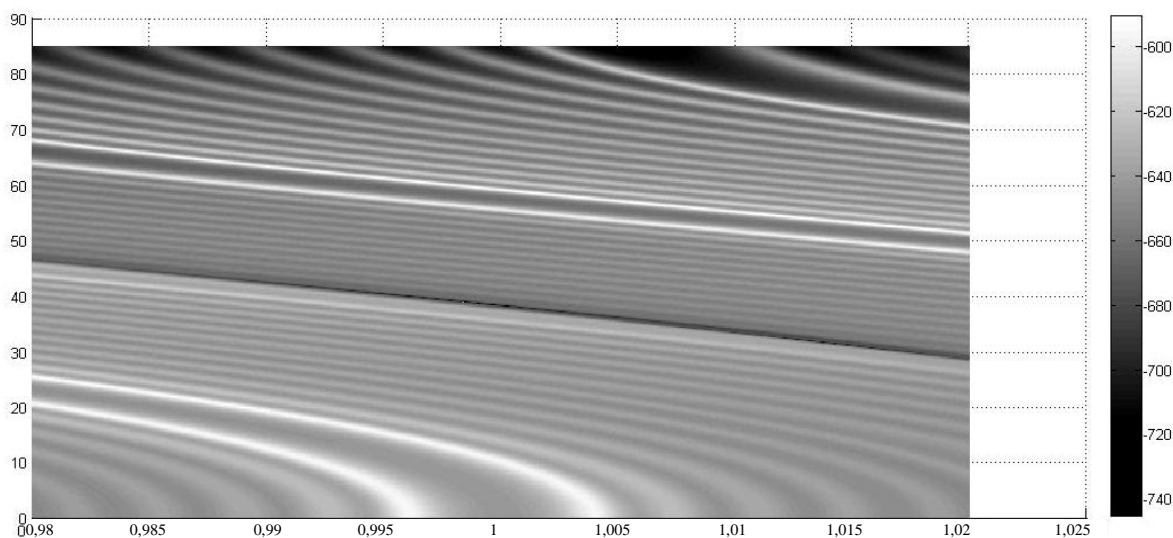
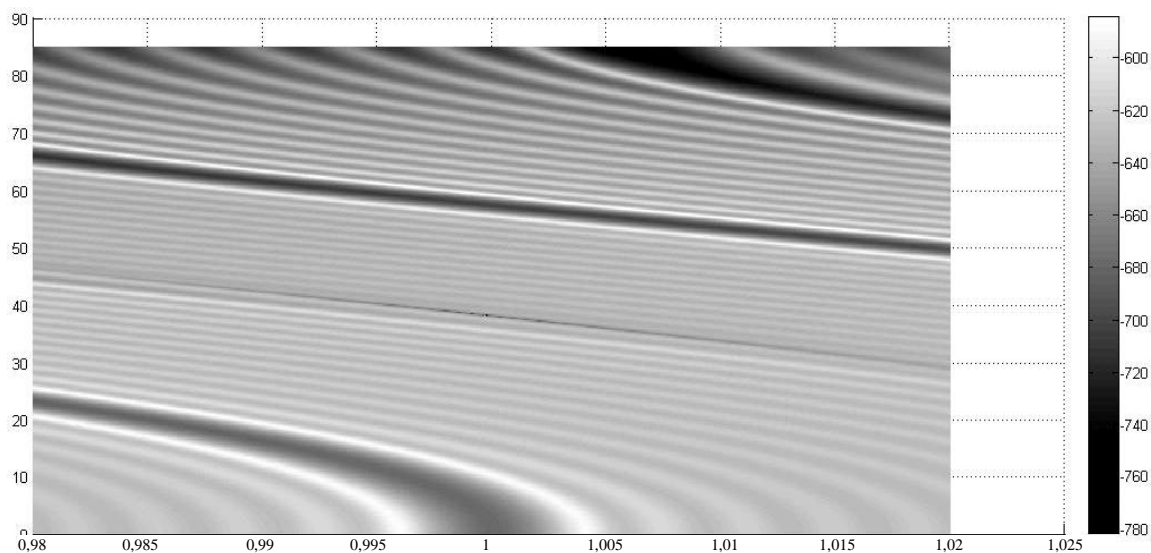


Рис. 4. Поверхности нелинейного коэффициента прохождения основной гармоники  $\hat{\tau}_{n1}$

Рис. 5. Поверхности нелинейного коэффициента отражения третьей гармоники  $\hat{\rho}_{n3}$ Рис. 6. Поверхности нелинейного коэффициента прохождения третьей гармоники  $\hat{\tau}_{n3}$ 

### Заключение

Таким образом, разработан эффективный метод анализа порождения нелинейных компонент поля на диэлектрическом пакете с нелинейными свойствами. Количество анализируемых слоев неограниченно. Исследована структура нелинейного зеркала, позволяющая значительно усилить такие нелинейные эффекты, как преобразование частоты в оптическом диапазоне.

Авторы выражают благодарность профессору А.М. Лереру за оказанную им помощь в работе.

### Литература

1. Boyd R.W. Nonlinear optics. N.Y., 2003. 578 p.
2. Lee J., Tymchenko M., Argyropoulos C., Chen Pai-Yen, F. Lu, Demmerle F., Boehm G., Amann M.C., Alu A., Belkin M.A. Giant nonlinear response from plasmonic metasurfaces coupled to intersubband transitions // Nature. 2014. Vol. 511. P. 65 – 69.
3. Хомченко А.В. Нелинейность оптических свойств тонких пленок при низкой интенсивности света // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70, вып. 11. С. 136 – 139.
4. Люксютов С.Ф., Ющук О.И. Импульсный лазер на красителе с внутррезонаторным нелинейным

зеркалом на фоторефрактивном кристалле // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 3. С. 297 – 299.

5. Lerer A.M., Donets I.V., Tsvetkovskaya S.M. Nonlinear Diffraction by Multilayer Dielectric // Proc. of conf. ММЕТ\*2014. August, 28 – 30. Dnepropetrovsk, Ukraine, 2014. P. 89 – 92.

6. Abd-Lefdil M., Douayar A., Belayachi A., Reshak A.Y., Fedorchuk A.O. Third harmonic generation process in Al doped ZnO thin films // J. of Alloys and Compounds. 2014. Vol. 584. P. 7 – 12.

7. Лерер А.М. Теоретическое исследование двумерно периодических наноплазмонных структур // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 11. С. 1160 – 1169.

#### References

1. Boyd R.W. *Nonlinear optics*. New York, 2003, 578 p.

2. Lee J., Tymchenko M., Argyropoulos C., Chen Pai-Yen, Lu F., Demmerle F., Boehm G., Amann M.C., Alu A., Belkin M.A. Giant nonlinear response from plasmonic metasurfaces coupled to intersubband transitions. *Nature*, 2014, vol. 511, pp. 65-69.

3. Khomchenko A.V. Nelineinost' opticheskikh svoystv tonkikh plenok pri nizkoi intensivnosti sveta [Nonlinear optical properties of thin films at low light intensity]. *Zhurn. tekhn. fiziki*, 2000, vol. 70, no 11, pp. 136-139.

4. Lyuksyutov S.F., Yushchuk O.I. Impul'snyi lazer na krasitele s vnutrirezonnym nelineinym zerkalom na fоторефрактивном кристалле [Pulsed dye laser with intracavity nonlinear mirror based on a photorefractive crystal]. *Kvantovaya elektronika*, 1990, vol. 17, no 3, pp. 297-299.

5. Lerer A.M., Donets I.V., Tsvetkovskaya S.M. Nonlinear Diffraction by Multilayer Dielectric. *Proc. of conf. ММЕТ\*2014*. August, 28-30. Dnepropetrovsk, Ukraine, 2014, pp. 89-92.

6. Abd-Lefdil M., Douayar A., Belayachi A., Reshak A.Y., Fedorchuk A.O. Third harmonic generation process in Al doped ZnO thin films. *J. of Alloys and Compounds*, 2014, vol. 584, pp. 7-12.

7. Lerer A.M. Teoreticheskoe issledovanie dvukhmerno periodicheskikh nanoplazmonnykh struktur [Theoretical study of two-dimensionally periodic nanoscale plasmonic structures]. *Radiotekhnika i elektronika*, 2012, vol. 57, no 11, pp. 1160-1169.

УДК 539.3

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-54-60

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА С СОБСТВЕННЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ\*

© 2016 г. М.И. Карякин, Н.Ю. Шубчинская

Карякин Михаил Игоревич – доктор физико-математических наук, доцент, кафедра теории упругости, директор Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090; Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, 362027, e-mail: karyakin@math.sfedu.ru

Karyakin Mikhail Igorevich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of the Elasticity Theory, Head of Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Southern Institute of Mathematics of Vladikavkaz Scientific Center RAS, Marcus St., 22, Vladikavkaz, 362027, Russia, e-mail: karyakin@math.sfedu.ru

Шубчинская Наталья Юрьевна – кандидат физико-математических наук, инженер-проектировщик 1-й категории, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: nyshubchinskaya@sfedu.ru

Shubchinskaya Nataliya Yurievna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Engineer-Designer of the First Category, Department of the Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: nyshubchinskaya@sfedu.ru

Рассмотрена задача об устойчивости нелинейно-упругого цилиндра с внутренними напряжениями, источником которых является клиновидная дисклинация. На основе модифицированного полубратного представления нелинейной теории упругости получены уравнения нейтрального равновесия для двух моделей материалов: полулинейного и Блейтца и Ко общего вида. На основе бифуркационного подхода изучено существование решений линеаризованных краевых задач. Получены критические значения кратности удлинения/укорочения цилиндра от параметра дефекта при растяжении и сжатии.

**Ключевые слова:** дисклинация, устойчивость, дислокации Вольтерра, растяжение, сжатие, собственные напряжения.

The stability problem of nonlinearly elastic cylinder with internal stresses the cause of which is a wedge disclination was introduced. On the basis of the modified semi-inverse representation of the nonlinear elasticity theory, the equations of neutral equilibrium were derived for the two models of materials: harmonic and Blatz-Ko models. On the basis of the bifurcation approach the existence of the solution of linearized boundary value problems was studied. The critical values of ratio in length changes of the cylinder depending on parameter of the defect under tension and compression were obtained.

**Keywords:** disclination, stability, Volterra dislocation, extension, compression, internal stresses.

Понятие линейного дефекта как источника собственных деформаций и, следовательно, напряжений в рамках классической теории упругости дано В. Вольтерра [1] в начале XX в. Подробный анализ и классификация таких дефектов – дисторсий Вольтерра – осуществлены А. Лявом [2]. Определение поворотных дефектов как дисклинаций рассмотрено в [3–5]. Изучению задач механики с использованием дислокаций посвящено много зарубежных и отечественных работ. Для дисклинационных дефектов результаты решения граничных задач изложены в монографии [6]. Дисклинационный подход, применяемый к дефектам в структурах нанокристаллических твердых частиц и малых частиц, описан в [7]. Исследованию влияния клиновых дисклинаций на напряженно-деформированное состояние как пластин и оболочек, так и упругих тел посвящены работы [8–12]. Результаты обобщения

теории упругих дислокаций и дисклинаций на нелинейный случай приведены в монографии [13].

В настоящей работе проанализировано влияние неоднородного поля напряжений, вызванного изолированной клиновидной дисклинацией, на устойчивость растягиваемого и сжимаемого нелинейно-упругого цилиндра. Анализ устойчивости проводился на основе бифуркационного подхода [14, 15], в рамках которого исследовалось существование нетривиальных решений линеаризованной краевой задачи. Изучено влияние геометрических и материальных параметров на бифуркационные кривые.

### Клиновидная дисклинация в полом цилиндре

Определяющее соотношение изотропного сжимаемого упругого тела имеет вид [15]

$$\mathbf{D} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T. \quad (1)$$

\* Работа выполнена при частичной поддержке проекта «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур» (в рамках программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования»).

Здесь  $\mathbf{D}$  – тензор напряжений Пиолы;  $\mathbf{G}$  – мера деформации Коши – Грина;  $\mathbf{C}$  – градиент деформации. Для модели полулинейного материала [15] удельная потенциальная энергия

$$W = \lambda \frac{1}{2} I_1^2 (\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \mu I_1 [(\mathbf{U} - \mathbf{E})^2], \quad (2)$$

где  $I_k, k=1,2,3$  – главные инварианты;  $\mathbf{U} = (\mathbf{G})^{\frac{1}{2}}$  – левый тензор искажения;  $\lambda, \mu$  – материальные параметры;  $\mathbf{E}$  – единичный тензор. Удельная потенциальная энергия для модели материала Блейтца и Ко

$$W = \mu \frac{1}{2} (1 - \beta) \left[ I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^\alpha - 1) - 3 \right] + \mu \frac{1}{2} \beta \left[ I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right]. \quad (3)$$

В выражении (3)  $\alpha, \beta$  – материальные параметры, первый из которых в случае малых деформаций связан с коэффициентом Пуассона соотношением  $\alpha = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$ , а второй характеризует чисто нелинейные свойства среды.

Деформация растяжения (сжатия) полого кругового цилиндра с образованием в нем клиновой дисклинации задается полуобратным представлением [8, 16]

$$R = P(r); \quad \Phi = \alpha \varphi; \quad Z = \gamma z. \quad (4)$$

Здесь  $\{R, \Phi, Z\}, \{r, \phi, z\}$  – цилиндрические координаты текущей и отсчетной конфигураций соответственно;  $P(r)$  – функция радиального смещения точек цилиндра;  $\alpha$  – параметр дисклинации, зависящий от угла раствора клина;  $\gamma$  – параметр изменения длины цилиндра. Выражения необходимых деформационных характеристик и инвариантов находятся по полуобратному представлению (4). Подставив их в (1) и учтя (2), (3), получим тензор напряжений Пиолы.

Описанный выше подход был использован в [17], где приведены уравнения равновесия и граничные условия, т.е. нелинейные краевые задачи для функции  $P(r)$ , а также результаты их численного и асимптотического анализа. Там же подробно описано влияние образования дисклинации на изменение длины ненагруженного цилиндра. Диаграмма нагружения (зависимость растягивающей силы от удлинения цилиндра) в случае материала Блейтца и Ко приведена на рис. 1.

Здесь  $\alpha = 0,5$ ; толщина стенки – 0,5; линия 1 соответствует значению параметра  $\beta = 0$ ; линия 2 –  $\beta = 0,2$ ; линия 3 –  $\beta = 0,5$ ; линия 4 –  $\beta = 0,7$ ; линия

$$5 - \beta = 1; \quad Q_0 = \frac{Q}{\mu r_1^3} [17].$$

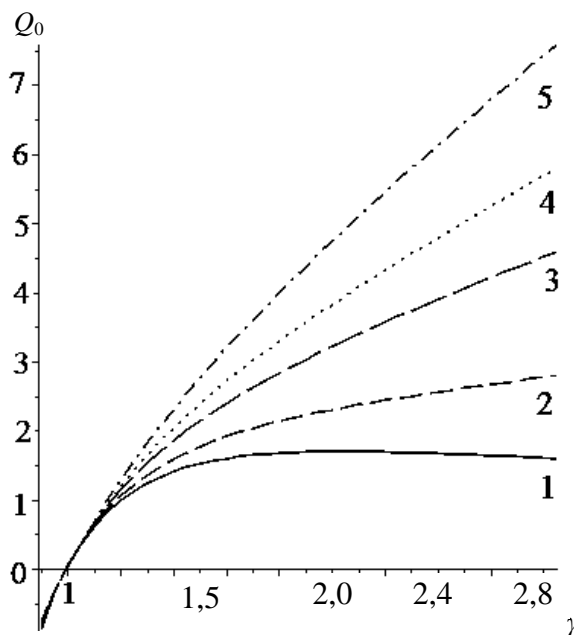


Рис. 1. Зависимость растягивающей силы от удлинения цилиндра

Для материала Блейтца и Ко известно, что для малых значений параметра  $\beta$  на диаграмме нагружения существует точка максимума, за ней следует падающий участок [18], который может свидетельствовать о потере устойчивости цилиндра при растяжении.

В случае полулинейного материала диаграмма нагружения – монотонно возрастающая функция; значение параметра дисклинации влияет только на величину силы, а не на характер самой зависимости.

### Уравнения нейтрального равновесия

Для изучения устойчивости цилиндра с изолированной дисклинацией модифицируется полуобратное представление (4)

$$\begin{cases} R = P(r) + \varepsilon U(r, \varphi, z); \\ \Phi = \alpha \varphi + \varepsilon V(r, \varphi, z); \\ Z = \gamma z + \varepsilon W(r, \varphi, z). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $U(r, \varphi, z), V(r, \varphi, z), W(r, \varphi, z)$  – новые неизвестные функции;  $\varepsilon$  – малый параметр. Градиент деформации, соответствующий преобразованию (5), может быть записан в виде

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{C}}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{C}_0$  – градиент деформации, соответствующий основному решению, устойчивость которого исследуется, а тензор  $\dot{\mathbf{C}}$  линейно зависит от функций  $U(r, \varphi, z), V(r, \varphi, z), W(r, \varphi, z)$ . Аналогичным обра-

зом линеаризуются остальные геометрические характеристики деформации. Общая форма процесса

$$\text{линеаризации имеет вид } \dot{\mathbf{F}} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{F} \left( \mathbf{C}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{C}} \right) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Уравнения нейтрального равновесия запишутся в следующем виде:

$$\text{div } \dot{\mathbf{D}} = 0, \tag{7}$$

где  $\dot{\mathbf{D}}$  – линеаризованный тензор напряжений Пиолы. В компонентах этого тензора система уравнений (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{D}_{rR}}{\partial r} + \frac{\dot{D}_{rR}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{\varphi R}}{r \partial \phi} - \frac{\dot{\alpha} \dot{D}_{\varphi \Phi}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{zR}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{D}_{r\Phi}}{\partial r} + \frac{\dot{D}_{r\Phi}}{r} + \frac{\dot{D}_{\varphi R}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{\varphi \Phi}}{r \partial \phi} + \frac{\partial \dot{D}_{z\Phi}}{\partial z} &= 0, \tag{8} \\ \frac{\partial \dot{D}_{rZ}}{\partial r} + \frac{\dot{D}_{rZ}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{\varphi Z}}{r \partial \phi} + \frac{\partial \dot{D}_{zZ}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для (8), означающие, что боковые поверхности цилиндра свободны от напряжений, выписываются через компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы

$$\begin{aligned} \dot{D}_{rR} \Big|_{r=r_0, r_1} &= 0, \\ \dot{D}_{r\Phi} \Big|_{r=r_0, r_1} &= 0, \tag{9} \\ \dot{D}_{rZ} \Big|_{r=r_0, r_1} &= 0. \end{aligned}$$

Линеаризованная краевая задача (8), (9) состоит из трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных относительно функций  $U(r, \varphi, z)$ ,  $V(r, \varphi, z)$ ,  $W(r, \varphi, z)$ .

Компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы для полуплинейного материала выписываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{D}_{rR} &= \frac{1}{r} \left( (\lambda + 2\mu) r U'_r + \lambda (U \alpha + V'_\varphi + r W'_z) \right), \\ \dot{D}_{r\Phi} &= V'_r (2\mu + \lambda) + \frac{(3\lambda + 2\mu)(U'_\varphi - \alpha V - r V'_r)}{P'r + P\alpha} + \\ &+ \lambda \frac{(\alpha P + r\gamma)(V'_r + V\alpha)}{r(P'r + P\alpha)} + \lambda \frac{\alpha P'V - P U'_\varphi - \gamma U'_\varphi}{P'r + P\alpha}, \\ \dot{D}_{rZ} &= (\lambda + 2\mu) W'_z - \lambda U'_z + \frac{(3\lambda + 2\mu)(U'_z - W'_r)}{r(P' + \gamma)}, \\ \dot{D}_{\varphi R} &= (2\mu + \lambda) \frac{P'r U'_\varphi - P'r \alpha V + \alpha U'_\varphi P' - \alpha^2 P V}{r(P'r + P\alpha)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{(3\lambda + 2\mu)(V'_r r + \alpha V - U'_\varphi)}{P'r + P\alpha} + \\ &+ \lambda \frac{V'_r(r\gamma + P'r + P\alpha) + \gamma(\alpha V - U'_\varphi)}{P'r + P\alpha}, \\ \dot{D}_{\varphi \Phi} &= \frac{1}{r} (\lambda + 2\mu)(U \alpha + V'_\varphi) + \lambda (\alpha U'_r + W'_z), \\ \dot{D}_{\varphi Z} &= \frac{\lambda + 2\mu}{r} W'_z - \frac{3\lambda + 2\mu}{P\alpha + \gamma} (W'_r - V'_z) + \\ &+ \lambda \frac{W'_\varphi(P' - \gamma) - V'_z(rP' + P\alpha)}{P\alpha + \gamma}, \\ \dot{D}_{zR} &= \frac{\lambda + 2\mu}{P' + \gamma} U'_z - \frac{3\lambda + 2\mu}{P' + \gamma} (U'_z - W'_r) - \\ &- \lambda \frac{W'_r(rP' + P\alpha) - \alpha P U'_z}{r(P' + \gamma)}, \\ \dot{D}_{z\Phi} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\alpha P + \gamma} V'_z + \frac{3\lambda + 2\mu}{\alpha P + \gamma} (W'_\varphi - r V'_z) + \\ &+ \lambda \frac{P'r^2 V'_z - W'_r(rP' + P\alpha + r\gamma)}{r(\alpha P + \gamma)}, \\ \dot{D}_{zZ} &= \frac{\lambda}{r} (U'_r + U \alpha + V'_\varphi) + (\lambda + 2\mu) W'_z. \end{aligned}$$

Компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы для материала Блейтца и Ко определяются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{D}_{rR} &= \frac{\mu}{P'^4} \left( (\beta - 1) A_2 (P'^2 (1 - 2\alpha) U'_r - P'^3 2\alpha A_4) - \right. \\ &- 3U'_r) + \beta (A_1 P'^2 (2\alpha + 1) + U'_r P'^4 + A_3 P'^3 2\alpha A_4) \Big), \\ \dot{D}_{r\Phi} &= \frac{\mu}{P'^3 P^3 \alpha^3} \left( (1 - \beta) (A_2 P'^2 P^2 \alpha^2 (V \alpha P + U'_\varphi) + \right. \\ &+ U'_\varphi (\alpha^2 P^2 + r^2 P'^2) - V \alpha^3 P^3 + V'_r r^2 \alpha P^2 P') + \\ &+ \beta P'^2 P^2 \alpha^2 (A_3 (V \alpha P + U'_\varphi) + P' P \alpha (P'V + P V'_r)) \Big), \\ \dot{D}_{rZ} &= \frac{\mu}{\gamma^3 P'^3} \left( (\beta - 1) (U'_z A_2 \gamma^2 P'^2 - W'_r P' \gamma - \right. \\ &- U'_r (P'^2 + \gamma^2)) + \beta (A_3 \gamma^2 P'^2 U'_z + W'_r \gamma^3 P'^3) \Big), \\ \dot{D}_{\varphi R} &= \frac{-\mu}{P'^3 P^3 \alpha^3 r} \left( (1 - \beta) (A_2 P'^3 P^2 \alpha^2 r^2 V_r + \right. \\ &+ A_3 P'^2 P^3 \alpha^3 \gamma^2 r^2 V'_r - V'_r P r^2 (r^2 P'^2 + P^2 \alpha^2) - \\ &- r^2 P' (V r^2 P'^2 + P \alpha U'_\varphi)) - \beta (A_3 P'^3 P^2 \alpha^2 r^2 V - \\ &- P'^3 P^3 \alpha^3 (P V \alpha - U'_\varphi)) \Big), \\ \dot{D}_{\varphi \Phi} &= \frac{-\mu}{r \alpha^4 P^4} \left( (\beta - 1) (P \alpha W'_z 2\alpha + 3r^4 (P V'_\varphi - U \alpha) + \right. \\ &+ A_2 r^2 \alpha^2 P^2 (2\alpha - 1) (V'_\varphi P + U \alpha)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta(2A_3\alpha P'P^2r^2\mathfrak{e}^2U'_\varphi + \mathfrak{e}^4P^4(PV'_\varphi + U\mathfrak{e}) - \\
 & -2A_2\alpha r^2\mathfrak{e}^3P^3P'^{-1}U'_r - 2\alpha W'_z\mathfrak{e}P + \\
 & + A_3P^2r^2\mathfrak{e}^2(U\mathfrak{e} + PV'_\varphi)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_{\varphi z} = & \frac{-\mu}{\gamma^2P^2\mathfrak{e}^3r}((1-\beta)(A_2\gamma^2P^2\mathfrak{e}^2r^2V'_z - \\
 & -r^2(P^2\mathfrak{e}^2V'_z + V'_z\gamma^2r^2 + \gamma\mathfrak{e}W'_\varphi)) - \\
 & -\beta(A_3P^2\mathfrak{e}^2r^2 + P^2W'_\varphi\mathfrak{e}^3\gamma^3)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_{zR} = & \frac{\mu}{\gamma^3P^3\mathfrak{e}^3}((\beta-1)(A_2\gamma^2P^2\mathfrak{e}^2W'_\varphi - \\
 & -P^2W'_r - P'U'_z\gamma^2 - W'_r\gamma) + \beta\gamma^2P^2\mathfrak{e}^2A_3W'_\varphi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_{z\Phi} = & \frac{\mu}{\mathfrak{e}^3P^3\gamma^3}((\beta-1)(A_2\mathfrak{e}^3P^2\gamma^2W'_\varphi - W'_\varphi r^2\gamma^2 - \\
 & -P^2V'_z\mathfrak{e}\gamma r^2 - P^2W'_\varphi\mathfrak{e}^2) + \beta A_3\mathfrak{e}^2P^2\gamma^2W'_\varphi),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{D}_{zZ} = & \frac{-\mu}{\gamma^4}(\beta A_1\gamma^2(2\alpha A_4\gamma - (2\alpha+1)W'_z) - \\
 & -2\gamma^2(\beta-1)A_2(W'_z + 2\alpha(\gamma A_4 - W'_z))),
 \end{aligned}$$

где использовались обозначения:

$$A_1 = P'^{2\alpha} P^{-2\alpha} r^{2\alpha} \gamma^{-2\alpha} \mathfrak{e}^{-2\alpha},$$

$$A_2 = P'^{2\alpha} P^{2\alpha} r^{-2\alpha} \gamma^{2\alpha} \mathfrak{e}^{2\alpha},$$

$$A_3 = P'^{-2\alpha} P^{-2\alpha} r^{2\alpha} \gamma^{-2\alpha} \mathfrak{e}^{-2\alpha}, \quad A_4 = \frac{V'_\varphi}{\mathfrak{e}} + \frac{W'_z}{\gamma} + \frac{U}{P}.$$

Система (8), (9) допускает решения вида

$$\begin{aligned}
 U(r, \varphi, z) &= u(r) \cos(n\varphi) \cos(\varpi z), \\
 V(r, \varphi, z) &= v(r) \sin(n\varphi) \cos(\varpi z), \\
 W(r, \varphi, z) &= w(r) \cos(n\varphi) \sin(\varpi z),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $\varpi = m\pi/l$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $l$  – длина цилиндра.

Анализ существования нетривиальных решений системы (8), (9) с учетом (10) проводился по схеме, аналогичной использованной в работах [13, 14].

Общее решение искалось в виде

$$\begin{aligned}
 u &= C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3, \\
 v &= C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3, \\
 w &= C_1w_1 + C_2w_2 + C_3w_3,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $u_k, v_k, w_k, k=1,2,3$  – линейно-независимые наборы функций, представляющие собой решения задач Коши для (7), у которых начальные условия для функций имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_1(r_0) &= 1, v_1(r_0) = 0, w_1(r_0) = 0, \\
 u_2(r_0) &= 0, v_2(r_0) = 1, w_2(r_0) = 0, \\
 u_3(r_0) &= 0, v_3(r_0) = 0, w_3(r_0) = 1,
 \end{aligned} \tag{12}$$

а для производных  $u'_k(r_0), v'_k(r_0), w'_k(r_0)$  получаются выражением последних из равенств (9) в точке  $r = r_0$  с учетом (12). В случае полулинейного материала эти условия определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 u'_1(r_0) &= -\frac{\mathfrak{e}\gamma}{r_0(\lambda + 2\mu)}, \\
 v'_1(r_0) &= \frac{-n(A_5\lambda - 2\mu r_0)}{r_0(\lambda A_5 + 2\mu(P'(r_0)r_0 + P(r_0)\mathfrak{e} - r_0))}, \\
 w'_1(r_0) &= \frac{-\varpi(A_5\lambda - 2\mu r_0)}{\lambda A_5 + 2\mu(P'(r_0)r_0 + P(r_0)\mathfrak{e} - r_0)}, \\
 u'_2(r_0) &= -\frac{\lambda n}{r_0(\lambda + 2\mu)}, \\
 v'_2(r_0) &= \frac{-\mathfrak{e}(A_5\lambda - 2\mu r_0)}{r_0(\lambda A_5 + 2\mu(P'(r_0)r_0 + P(r_0)\mathfrak{e} - r_0))},
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$w'_2(r_0) = 0, \quad u'_3(r_0) = -\frac{\varpi\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad v'_3(r_0) = 0, \quad w'_3(r_0) = 0,$$

где  $A_5 = P'(r_0)r_0 + P(r_0)\mathfrak{e} + \gamma r_0 - 3r_0$ .

При рассмотрении материала Блейтца и Ко начальные условия для производных функций имеют вид

$$\begin{aligned}
 u'_1(r_0) &= \frac{2\alpha P'(r_0)((\beta-1)A_6 - \beta r_0^{4\alpha} P'^2(r_0))}{P(r_0)((\beta-1)A_{10} + P'^2(r_0)\beta A_{11})}, \\
 v'_1(r_0) &= \frac{n((\beta-1)(A_{13} - P'^2(r_0)r_0^2) + \beta A_9)}{A_{12}},
 \end{aligned}$$

$$w'_1(r_0) = \frac{a(\mathfrak{e}^2(\beta-1)(A_8 - \gamma^2 - P'^2(r_0)) + \gamma^2\beta A_9)}{\mathfrak{e}^2 P'(r_0)\gamma(\beta P'^2(r_0)\gamma^2 + 1 - \beta)},$$

$$u'_2(r_0) = \frac{2n\alpha P'^3(r_0)(A_6(\beta-1) - \beta r_0^{4\alpha} P^2(r_0))}{\mathfrak{e} P^4(r_0)((\beta-1)A_{10} + P'^2(r_0)\beta A_{11})},$$

$$v'_2(r_0) = -\frac{(\beta-1)P(r_0)A_{13} + \beta P(r_0)A_{14}}{A_{12}}, \tag{14}$$

$$w'_2(r_0) = 0,$$

$$u'_3(r_0) = -\frac{2a\alpha P'^3(r_0)((\beta-1)A_6 - \beta r_0^{4\alpha})}{\gamma((\beta-1)A_{10} + P'^2(r_0)\beta A_{11})},$$

$$v'_3(r_0) = 0, \quad w'_3(r_0) = 0,$$

где

$$A_6 = P'^{4\alpha+2}(r_0)P^{4\alpha+2}(r_0)\gamma^{4\alpha}\mathfrak{e}^{4\alpha},$$

$$A_7 = P'^{2\alpha}(r_0)P^{2\alpha}(r_0)\gamma^{2\alpha}\mathfrak{e}^{2\alpha}r_0^{2\alpha},$$

$$A_8 = P'^{2\alpha+2}(r_0)P^{2\alpha+2}(r_0)\gamma^{2\alpha}\mathfrak{e}^{2\alpha+2}r_0^{-2\alpha},$$

$$A_9 = P'^{-2\alpha+2}(r_0)P^{-2\alpha+2}(r_0)\gamma^{-2\alpha}\mathfrak{e}^{-2\alpha+2}r_0^{2\alpha},$$

$$A_{10} = A_6(1 - 2\alpha) - 3A_7,$$

$$A_{11} = (1 + 2\alpha)r_0^{4\alpha} + A_7P'^2(r_0),$$

$$A_{12} = \beta P'^3(r_0)P^3(r_0)\mathfrak{e}^3 - P'(r_0)P^2(r_0)\mathfrak{e}r_0^2(\beta - 1),$$

$$A_{13} = A_8 - \mathfrak{e}^2P^2(r_0), \quad A_{14} = A_9 - \mathfrak{e}^2P^2(r_0)P'^4(r_0).$$

Таким образом, линейная независимость обусловлена условиями (12), а вторая часть условий (13), (14) обеспечивает выполнение краевых условий (9) в точке  $r = r_0$ . Удовлетворение краевым условиям (9) в точке  $r = r_1$  приводит к линейной системе уравнений относительно неизвестных констант интегрирования  $C_k, k=1,2,3$ . Критические значения параметра изменения длины цилиндра  $\gamma^*$  находятся из характеристического

уравнения – равенства нулю определителя системы для нахождения неизвестных констант  $C_k$ .

### Численный анализ устойчивости цилиндра с дисклинацией при растяжении и сжатии

Численное исследование существования нетривиальных решений системы (8), (9) показало наличие критических значений деформационной характеристики  $\gamma^*$  в зависимости от параметра дисклинации (рис. 2).

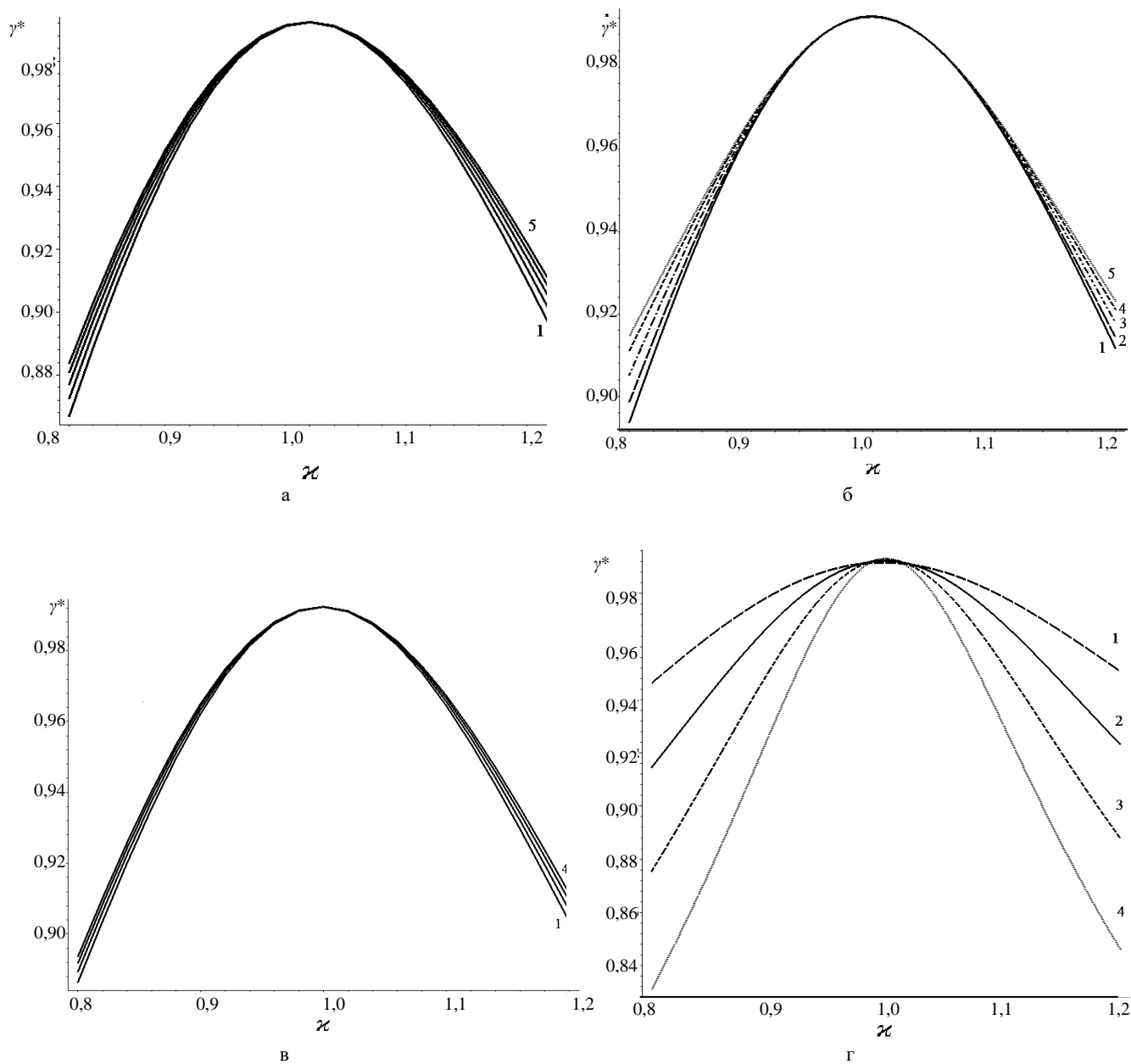


Рис. 2. Бифуркационные кривые



На рис. 2а изображены бифуркационные кривые – множество точек, при которых возникают новые формы равновесия цилиндра при сжатии в зависимости от параметра изолированной дисклинации  $\varkappa$ . В случае полулинейного материала для различных значений материальных параметров при толщине  $h=0,99$  и длине  $l=20$  получены следующие бифуркационные кривые: линия 1 –  $\nu=0,45$ ; 2 –  $\nu=0,4$ ; 3 –  $\nu=0,35$ ; 4 –  $\nu=0,3$ ; 5 –  $\nu=0,25$ . Все эти значения критического параметра  $\gamma^*$  представлены для мод с номерами  $m=1, n=1$  по (10), так как численно проверено, что именно они являются наименьшими среди значений с другими номерами мод. Из графиков ясно, что наличие дисклинации оказывает существенное влияние на потерю устойчивости цилиндра при сжатии, причем кривые практически симметричны относительно случая  $\varkappa=1$  – отсутствия дисклинации. В зоне больших дисклинаций существенное влияние на критическое значение  $\gamma^*$  оказывает значение коэффициента  $\nu$ . Положение кривых при значении  $\varkappa=1$  (отсутствие дисклинации) соответствует стержневой потере устойчивости по Эйлеру [19].

На рис. 2б приведены бифуркационные кривые цилиндра при сжатии в зависимости от параметра дисклинации  $\varkappa$  в случае материала Блейтца и Ко при толщине стенки цилиндра  $h=0,5$ ;  $\alpha=0,5$  и длине  $l=20$ : линия 1 –  $\beta=1$ ; 2 –  $\beta=0,8$ ; 3 –  $\beta=0,5$ ; 4 –  $\beta=0,2$ ; 5 –  $\beta=0$ . Как и в предыдущем случае, представлены значения для мод с номерами  $m=1, n=1$ . Наличие дисклинации оказывает существенное влияние на потерю устойчивости цилиндра при сжатии (как и значение параметра  $\beta$  модели материала (3): чем выше значение параметра модели  $\beta$ , тем устойчивее цилиндр при сжатии).

На рис. 2в изображены точки бифуркации для первых мод  $m=1, n=1$  цилиндра при сжатии в зависимости от параметра дисклинации  $\varkappa$  в случае так называемого гипотетического варианта [15] материала Блейтца и Ко ( $\beta=1$ ) для различных значений коэффициента  $\alpha$  при толщине  $h=0,5$  и длине  $l=20$ : линия 1 –  $\alpha=2$ ; 2 –  $\alpha=1,16$ ; 3 –  $\alpha=0,75$ ; 4 –  $\alpha=0,5$ . Из графиков заметно, что изменение коэффициента  $\alpha$  оказывает существенное влияние на значение точек бифуркации. Все бифуркационные кривые симметричны относительно  $\varkappa=1$  (случая отсутствия дисклинации).

На рис. 2г изображены бифуркационные кривые для сжимаемого цилиндра длины  $l=20$  с дисклинацией из материала Блейтца и Ко упрощенного вида с номерами мод  $m=1, n=1$ . Линия 1 соответствует толщине 0,4; 2 – толщине 0,5; 3 – толщине 0,6;

4 – толщине 0,7. Чем толще цилиндр, тем ниже находится бифуркационная кривая (кроме значений, соответствующих малому изменению параметра дисклинации). При отсутствии дисклинации ( $\varkappa=1$ ) чем толще цилиндр, тем выше значение  $\gamma^*$ .

У цилиндра из полулинейного материала при растяжении нет потери устойчивости, так как его диаграмма нагружения – монотонно возрастающая [18]. При растяжении цилиндра с дисклинацией из модели материала Блейтца и Ко оказалось, что точки бифуркации существуют лишь для некоторых значений параметра  $\beta$ . Установлено, что наличие дисклинации практически не влияет на потерю устойчивости процесса растяжения (изменение в значении критического удлинения составляет доли процента), в то время как влияние материального параметра  $\alpha$  заметно сильнее. При  $\alpha=0,5$  точки бифуркации располагаются в окрестности значений 2,05 [15], при  $\alpha=0,75$  – 2,172, при увеличении  $\alpha$  до 1,16 (коэффициент Пуассона  $\nu=0,35$ ) величина критического удлинения возрастает до 2,347.

#### Литература

1. *Volterra V.* Sur l'équilibre des corps elastiques multiplement connexes // *Annales de l'Ecole Norm. Sup.* 1907. Vol. 24, № 3. P. 401–517.
2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л., 1935. 674 с.
3. *Frank F.C.* On the theory of liquid crystals // *Trans. Faraday SOC.* 1958. Vol. 25. P. 19 – 28.
4. *De Wit R.* Theory of Disclinations: IV. Straight Disclinations // *J. of Research of the Notional Bureau of Standards-A. Physics and Chemistry.* 1973. Vol. 77A, № 5. P. 607 – 658.
5. *Clayton J.D., McDowell D.L., Bammann D.J.* Modeling dislocations and disclinations with finite micropolar elastoplasticity // *Int. J. of Plasticity.* 2006. Vol. 22. P. 210 – 256.
6. *Luo J., Xiao Z.M., Zhou K.* Stress analysis on a Zener crack nucleation from an eccentric wedge disclination in a cylinder // *Int. J. of Engineering Science.* 2009. Vol. 47. P. 811 – 820.
7. *Romanov A.E., Kolesnikova A.L.* Application of disclinations concept to solid structures // *Progress in Material Science.* 2009. Vol. 54. P. 740 – 769.
8. *Карякин М.И.* Равновесие и устойчивость нелинейно-упругой пластинки с клиновой дисклинацией // *ПМТФ.* 1992. № 3. С. 157 – 163.
9. *Zubov L.M.* The linear theory of dislocations and disclinations in elastic shells // *J. of Applied Mathematics and Mechanics.* 2010. Vol. 74. P. 663 – 672.
10. *Lee X., Baldo M., Duan Y.* Torsion structure in Riemann-Cartan manifold and dislocation // *Gen. Relativ. Gravit.* 2002. Vol. 34 (10). P. 1569 – 1577.

11. Zhang P., Duan Y., Zhang H. Knotlike  $\chi$  disclinations in the cholesteric liquid crystals // *Physica A*. 2006. Vol. 370. P. 245 – 250.

12. Zubov L.M. Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. Berlin; Heidelberg; New York, 1997. 205 p.

13. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel // *Int. J. of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. P. 90 – 105.

14. Карякин М.И., Сухов Д.Ю., Шубчинская Н.Ю. Об особенностях чистого изгиба панели при больших деформациях // *Экол. вестн. науч. центров ЧЭС*. 2012. № 4. С. 69 – 75.

15. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М., 1980. 512 с.

16. Zubov L.M. Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1986. № 1. С. 69 – 73.

17. Карякин М.И., Поздняков И.В., Пустовалова О.Г., Шубчинская Н.Ю. О деформированном состоянии нелинейно-упругого цилиндра с внутренними напряжениями // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*. 2013. № 6. С. 46 – 51.

18. Карякин М.И. Об особенностях растяжения нелинейно-упругих образцов // *Экол. вестн. науч. центров ЧЭС*. 2007. № 4. С. 43 – 48.

19. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. М., 1999. 592 с.

6. Luo J., Xiao Z.M., Zhou K. Stress analysis on a Zener crack nucleation from an eccentric wedge disclination in a cylinder. *International J. of Engineering Science*, 2009, vol. 47, pp. 811-820.

7. Romanov A.E., Kolesnikova A.L. Application of disclinations concept to solid structures. *Progress in Material Science*, 2009, vol. 54, pp. 740-769.

8. Karyakin M.I. Ravnovesie i ustoichivost' nelineino-uprugoi plastinki s klinovoi disklinatsiei [Equilibrium and stability of nonlinear elastic plate with a wedge disclination]. *PMTF*, 1992, no 3, pp. 157-163.

9. Zubov L.M. The linear theory of dislocations and disclinations in elastic shells. *J. of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74, pp. 663-672.

10. Lee X., Baldo M., Duan Y. Torsion structure in Riemann-Cartan manifold and dislocation. *Gen. Relativ. Gravit.*, 2002, vol. 34 (10), pp. 1569-1577.

11. Zhang P., Duan Y., Zhang H. Knotlike  $\chi$  disclinations in the cholesteric liquid crystals. *Physica A.*, 2006, vol. 370, pp. 245-250.

12. Zubov L.M. *Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies*. Berlin; Heidelberg; New York, 1997, 205 p.

13. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel. *Int. J. of Engineering Science*, 2014, vol. 80, pp. 90-105.

14. Karyakin M.I., Sukhov D.Yu., Shubchinskaya N.Yu. Ob osobennostyakh chistogo izgiba paneli pri bol'shikh deformatsiyakh [On peculiarities of pure bending panels for large deformations]. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov ChES*, 2012, no 4, pp. 69-75.

15. Lur'e A.I. *Nelineinaya teoriya uprugosti* [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow, 1980, 512 p.

16. Zubov L.M. Izolirovannaya disklinatsiya v nelineino-uprugom szhimaemom tele [Isolated disclination in nonlinear elastic compressible body]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1986, no 1, pp. 69-73.

17. Karyakin M.I., Pozdnyakov I.V., Pustovalova O.G., Shubchinskaya N.Yu. O deformirovannom sostoyanii nelineino-uprugogo tsilindra s vnutrennimi napryazheniyami [On the strained state of nonlinear elastic cylinder with internal stresses]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2013, no 6, pp. 46-51.

18. Karyakin M.I. Ob osobennostyakh rastyazheniya nelineino-uprugikh obraztsov [On peculiarities of nonlinear elastic strain samples]. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov ChES*, 2007, no 4, pp. 43-48.

19. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, 1999, 592 p.

#### References

1. Volterra V. Sur l'équilibre des corps elastiques multiplement connexes. *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*, 1907, vol. 24, no 3, pp. 401-517.

2. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. Moscow; Leningrad, 1935, 674 p.

3. Frank F.C. On the theory of liquid crystals. *Trans. Faraday SOC*, 1958, vol. 25, pp. 19-28.

4. De Wit R. Theory of Disclinations: IV. Straight Disclinations. *J. of Research of the Notional Bureau of Standards-A. Physics and Chemistry*, 1973, vol. 77A, no 5, pp. 607-658.

5. Clayton J.D., McDowell D.L., Bammann D.J. Modeling dislocations and disclinations with finite micropolar elastoplasticity. *Int. J. of Plasticity*, 2006, vol. 22, pp. 210-256.

## БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 631.4; 57.044; 504.05

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-61-67

ИЗМЕНЕНИЕ ЭКОЛОГО-БИОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
ПОЧВ ЮГА РОССИИ ПРИ ОГЛЕЕНИИ\*

© 2016 г. К.А. Кандашова, К.Ш. Казеев, С.И. Колесников

Кандашова Карина Андреевна – аспирант, кафедра экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского Южного федерального университета, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: biolog@sfedu.ru

Kandashova Karina Andreevna – Post-Graduate Student, Department of Ecology and Natural Management, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Stachki Ave, 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: biolog@sfedu.ru

Казеев Камил Шагидулович – доктор географических наук, профессор, кафедра экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского Южного федерального университета, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: kamil\_kazeev@mail.ru

Kazeev Kamil Shagidullovich – Doctor of Geographical Science, Professor, Department of Ecology and Natural Management, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Stachki Ave, 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: kamil\_kazeev@mail.ru

Колесников Сергей Ильич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, заведующий кафедрой экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского Южного федерального университета, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: kolesnikov@sfedu.ru

Kolesnikov Sergei Il'ich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Head of Ecology and Natural Management Department, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Stachki Ave, 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: kolesnikov@sfedu.ru

Представлены результаты лабораторного эксперимента по моделированию процесса оглеения на фоне застойного и застойно-промывного водного режима и влиянию его на эколого-биологические свойства почв. Оглеение – сложный биохимический восстановительный процесс. Глеевый процесс реализуется при участии анаэробных микроорганизмов, наличии органического вещества и постоянном или длительном затоплении отдельных горизонтов или всего профиля почвы. В результате ряда модельных экспериментов выявлено, что при оглеении возрастает общая численность бактерий и изменяются ферментативная активность и фитотоксичность почв.

**Ключевые слова:** глеевый процесс, модельный опыт, застойный водный режим, застойно-промывной водный режим, эколого-биологические свойства почв.

Results of laboratory modeling of gleyisation and its effect on the ecological and biological properties of soils with flooding water regime and periodically flooding water regime are presented in this article. Gleyisation is a complex biochemical process that occurs under oxygen reduction conditions. Anaerobic microorganisms, the presence of organic substances, and the constant or prolonged waterlogging of individual horizons or the entire soil profile promote gleyisation. Model experiments revealed that gleyisation increases the total number of bacteria and changes the activity of enzymes and phytotoxicity.

**Keywords:** gleyisation, model experiment, flooding water regime, periodically flooding water regime, ecological and biological properties of soils.

Переувлажнение является одним из главных экологических факторов, оказывающих влияние на эколого-биологические свойства почв. Экологически нерациональное использование почв и сильные антропогенные воздействия на почвенный покров, превышающие пределы его природной саморегуляции, способствуют развитию деградации почв. Это – одна из актуальнейших проблем современного человечества. Существенной составляющей общего решения этой проблемы для условий Юга России яв-

ляется исследование естественных и антропогенных процессов и факторов эволюции, функционирования и формирования агроландшафтов [1].

В последнее время в Ростовской области и на Юге России происходит существенное увеличение площади гидроморфных почв [1–3]. Эти почвы, помимо временного переувлажнения, подвержены и сопутствующим процессам: оглеению, уплотнению, слитизации и засолению. Наибольший интерес вызывает глеегенная деградация черноземов,

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (6.345.2014/К).

обладающих значительной буферностью свойств и высоким уровнем плодородия. Глееобразование и сульфидно-глеевый процесс в почвах Юга России имеют не только естественные причины, но и все чаще приобретают техногенную природу [4].

Для возникновения глееобразования необходимо наличие трех обязательных факторов: переувлажнения почв, присутствия гетеротрофной анаэробной микрофлоры и наличия органического субстрата, способного к ферментации.

Глееобразование – биогеохимический почвообразовательный процесс, реализующийся при анаэробии на выщелоченных, кислых и нейтральных почвах, не содержащих сульфатов, при обязательном присутствии гетеротрофной микрофлоры и наличии легкоразлагаемого органического вещества, в условиях периодического или постоянного обводнения [5].

Глеевый процесс сравнительно несложно воспроизводится в лабораторном моделировании при условии регулирования водного режима. В природных условиях изучение глеевого процесса осложнено одновременным действием других почвообразовательных процессов. Именно поэтому наиболее целесообразно исследование глееобразования в модельном эксперименте.

Основная цель исследования – изучение влияния переувлажнения и оглеения на эколого-биологические показатели почв Юга России в условиях лабораторного моделирования.

Актуальность исследования заключается в том, что автоморфные черноземы на данный момент подвергаются интенсивному переувлажнению и глеегенным процессам, не соответствующим экологии этих почв, приобретают признаки гидроморфизма, что и приводит к их деградации.

Для моделирования влияния переувлажнения и оглеения на биологическую активность почв в июне 2015 г. в качестве объекта исследования были отобраны чернозем обыкновенный (Ботанический сад ЮФУ, г. Ростов-на-Дону) и коричневая почва (заповедник «Утриш», Краснодарский край).

В качестве легкоразлагаемого органического вещества, необходимого для инициации развития глеегенных процессов на фоне застойного и застойно-промывного водного режима, была использована сахароза, поскольку этот дисахарид встречается в почве в естественных условиях [6]. Ранее было выявлено, что простое затопление даже на очень продолжительное время не приводило к развитию оглеения в черноземах [1, 7]. Для развития анаэробных процессов необходимо дополнительное внесение органического субстрата для создания условий кислородного дефицита [5].

Для постановки эксперимента по изучению переувлажнения и оглеения в условиях лабораторного эксперимента нами были составлены множественные пробы массой 400 г. Для каждой пробы был специально сконструирован пластиковый сосуд (мини-лизиметр). На дно сосудов были установлены синтетические фильтры и дренаж.

Сброс лизиметрических вод в вариантах опыта с застойно-промывным водным режимом производили один раз в неделю через отверстие в нижней части мини-лизиметра. После сброса лизиметрических вод образцы оставляли на 1 сут для высушивания. После аэрации образцы снова заливали раствором. Варианты опыта с застойным режимом размещали в сосудах с глухо закрытыми пробками. Также в сосуды были помещены стеклянные трубки для удаления воздуха. Сброс лизиметрических вод на фоне застойного режима провели в конце эксперимента.

В исследуемых почвах, инкубируемых на фоне застойно-промывного и застойного водного режима, ежедневно измеряли окислительно-восстановительный потенциал (ОВП, Eh) в почвенном растворе и в лизиметрических водах при сбросе. Если подъем ОВП был выше 250 мВ, то вновь добавлялась сухая сахароза для поддержания 1%-й концентрации раствора.

Контролем служили чернозем и коричневая почва с оптимальным увлажнением. Параллельно были смоделированы варианты при застойно-промывном и застойном режиме с водой без добавления субстрата.

Используемые в настоящей работе аналитические данные получены с применением общепринятых в биологии, экологии и почвоведении методов [8–11]. Длительность эксперимента составляла 39 сут. Каждый из процессов диагностировался по морфологическим показателям и контролировался измерением ОВП, Eh и температуры напочвенного раствора каждый день. На 45-е сут с начала эксперимента проводились измерения pH, активности каталазы и ферриредуктазы, содержания закиси железа, гумуса и нитратов, показателя фитотоксичности с использованием тест-организма редиса, общей численности бактерий.

ОВП, редокс-потенциал, Eh надпочвенного раствора и лизиметрических вод определяли потенциометрически с использованием ОВП-метра HANNA, pH почвы – в почвенной суспензии (почва/вода в соотношении 1/2,5) потенциометрически на иономере [9], концентрацию оксида железа (II) – фотометрическим методом с использованием фенантролина. Общая численность бактерий определялась люминесцентно-микроскопическим методом на микроскопе «Микмед-2». О фитотоксичности почв судили

по изменению характеристик прорастания семян и интенсивности роста тест-объекта [12]. В качестве тест-организмов был выбран редис. О ферментативной активности почв судили по активности оксидоредуктаз – каталазы и ферриредуктазы. Содержание гумуса определяли по его окисляемости хромовой смесью [13]. Определение нитратов в почвенной вытяжке проводили ионометрическим методом.

При рассмотрении застойного и застойно-промывного режима без добавления субстрата в черноземе обыкновенном существенного различия ОВП не наблюдается (рис. 1). Происходит постепенное плавное снижение показателя Eh с максимумом в начале эксперимента. Преобладают положительные значения Eh для данных режимов.

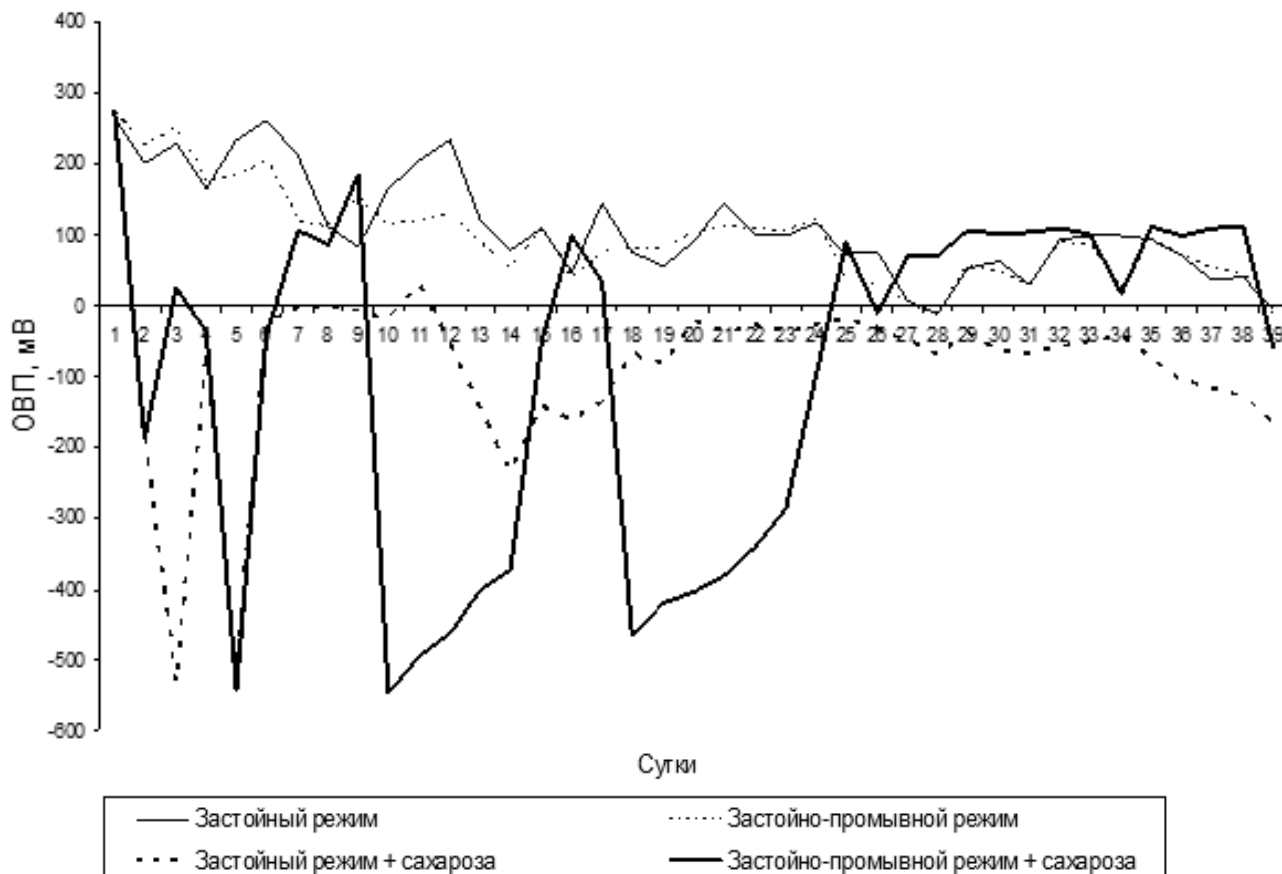


Рис. 1. Изменение окислительно-восстановительного потенциала в черноземе обыкновенном при моделировании переувлажнения и оглеения

При рассмотрении вариантов с добавлением субстрата в черноземе обыкновенном наблюдается резкое скачкообразное падение ОВП до минимальных значений (531 мВ в варианте с застойным режимом на 3-и сут; 542 мВ в варианте с застойно-промывным на 5-е сут) (рис. 1).

В черноземе с добавлением субстрата на фоне застойного водного режима надпочвенный раствор и почва приобрели мутно-сизый цвет с преобладанием холодного оттенка; отмечается обесструктуренность и слитизация. В черноземе с моделированием застойно-промывного режима и добавлением сахарозы средний ОВП существенно не отличался от застойного режима и составлял 92 мВ. Однако процесс проходил более резко. Замечено, что наиболее отрицательные значения Eh были через не-

сколько дней после сброса лизиметрических вод, просушки и внесения новой порции субстрата. В дни проведения манипуляций наблюдались положительные значения ОВП. После внесения новой порции субстрата на 26-е сут стимуляции анаэробного процесса уже не происходило, только в самом конце эксперимента лизиметрические воды имели отрицательные значения Eh.

В середине эксперимента наблюдались мутно-сизый цвет с преобладанием холодного оттенка, помутнение и газообразование в надпочвенном растворе, охристые отложения красно-бурого цвета. Можно полагать, что причиной этих отложений было образование гидроокиси железа. Гидрозакись железа имеет серо-зеленый цвет и существует только в восстановительных условиях, при контакте с кислородом возду-

ха быстро окисляется до гидроокиси железа красного цвета, поэтому при смене окислительно-восстановительных условий появляются такие характерные железистые образования.

Реакция среды для почвенной вытяжки чернозема на фоне застойно-промывного режима с добавлением сахарозы сдвигается в сторону кислой и составляет 5,4. Для других вариантов эксперимента рН среды оставался в области нейтральной реакции. Такая картина вполне естественна при протекании глеегенных процессов.

При анализе содержания гумуса удалось выявить незначительное понижение в моделируемых вариантах с добавлением субстрата и контрольным вариантом. Это согласуется с результатами некоторых исследователей. Количество нитратов в вариантах с моделированием оглеения и переувлажнения незначительно возрастает по отношению к контрольному образцу чернозема, что объясняется увеличением активности биологических процессов.

При исследовании каталазы установлено, что при застойно-промывном режиме с добавлением субстрата в черноземе ее активность ингибируется почти в 5 раз по сравнению с контрольным вариантом. В контроле этот показатель составлял 5,2 мл  $O_2$ /(г·мин), при сочетанном воздействии – 1,1 мл  $O_2$ /(г·мин). Стоит отметить, что в вариантах чернозема без добавления сахарозы с разными водными режимами активность каталазы составляла около 3,5 мл  $O_2$ /(г·мин), а в варианте с застойным режимом с добавлением раствора сахарозы – 4,2 мл  $O_2$ /(г·мин). Известно, что каталаза играет роль в окислении железа, так как при окислении органики образуется перекись водорода, которую в свою очередь и разлагает каталаза. При этом освобождается кислород, который в дальнейшем выступает окислителем двухвалентного железа. Настолько низкая активность каталазы доказывает, что в моделируемых биокосмах преобладают восстановительные условия.

Активность ферриредуктазы во всех вариантах опыта значительно выше, чем в контрольном варианте с оптимальным увлажнением. Ранее некоторыми исследователями [14] уже было установлено, что повышение активности ферриредуктазы имеет положительную корреляцию со степенью гидроморфизма почв. В автоморфном черноземе активность ферриредуктазы в 2–3 раза ниже, чем в гидроморфных почвах. Результаты нашего исследования показали, что активность ферриредуктазы в вариантах с моделированием оглеения в черноземах выше в 6–8 раз, чем в контрольном варианте чернозема, что также доказывает интенсивное протекание восстановительных процессов. Также идет накопление огромного количества восстановленного железа. Если принимать количество закиси же-

леза в контрольном варианте за 100 %, то 897 % обнаруживается в варианте с черноземом, затопленным раствором сахарозы, 647 % – в варианте с добавлением сахарозы на фоне застойно-промывного водного режима.

В результате проведенных исследований удалось показать, что процессы переувлажнения и оглеения оказывают негативный эффект на фитотоксичность чернозема. Наиболее низкие показатели длины стеблей и корней редиса обнаружались в варианте затопления чернозема 1%-м раствором сахарозы. Все остальные варианты опыта также были ниже контрольного. Процессы переувлажнения и оглеения в черноземе оказали наиболее губительное влияние на корневую систему редиса.

Общая численность бактерий, определенных методом люминесцентной микроскопии, была максимальной в варианте с сочетанным воздействием застойно-промывного режима и добавлением субстрата – 126 % по отношению к контролю. В варианте с застойным режимом этот показатель – 82 %. Добавление субстрата в виде сахарозы на фоне застойного режима незначительно увеличило общую численность бактерий до 103 %. При застойно-промывном режиме без добавления субстрата численность микрофлоры – 113 %.

Динамика ОВП для вариантов с коричневой почвой не показала существенного различия между застойным и застойно-промывным режимами (рис. 2).

При рассмотрении вариантов с добавлением субстрата наблюдается резкое скачкообразное падение ОВП до минимальных значений (521 в варианте с застойным режимом и 522 в варианте с застойно-промывным на 2-е сут эксперимента). Надпочвенный раствор и почва приобрели оранжевый цвет уже на 6-е сут в связи с окислением гидрозакиси железа; к концу 3-й декады наблюдалась дисперсия раствора.

В коричневой почве с моделированием застойно-промывного режима и добавлением сахарозы средний ОВП отличался от застойного режима (45 мВ). Однако процесс проходил более резко. Замечено, что наиболее отрицательные значения ОВП были через несколько дней после сброса лизиметрических вод, просушки и внесения новой порции субстрата в первой половине эксперимента.

Во второй половине эксперимента наблюдалась подобная тенденция, хотя смена окислительно-восстановительных условий происходила уже не так резко и была приурочена к средним значениям. На 10-е сут эксперимента раствор окрасился в оранжевый цвет, а в начале 3-й декады наблюдалась помутнение, дисперсия и газообразование в надпочвенном растворе.

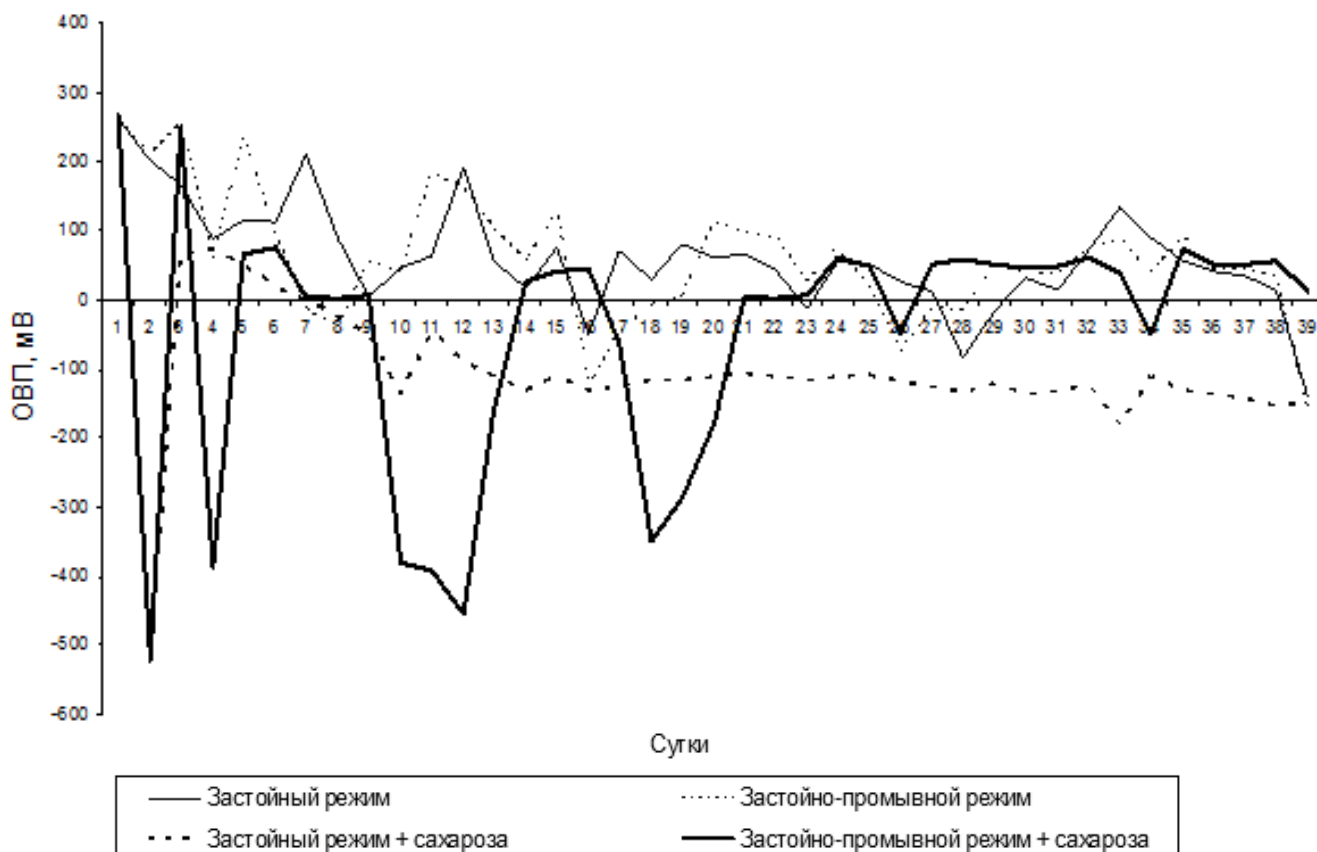


Рис. 2. Изменение окислительно-восстановительного потенциала в коричневой почве при моделировании переувлажнения и оглеения

pH среды для коричневой почвы оставался в диапазоне слабокислой реакции и понижался на фоне застойно-промывного режима с добавлением сахарозы до 5,5.

При анализе содержания гумуса в коричневой почве не удалось выявить существенных различий между моделями и контрольным вариантом. Содержание нитратов в вариантах с моделированием оглеения и переувлажнения незначительно возрастает по отношению к контрольному образцу коричневой почвы, что объясняется увеличением активности биохимических процессов. Полученные результаты по анализируемым показателям в коричневой почве аналогичны таковым в черноземных моделях.

При исследовании каталазы установлено, что при застойно-промывном режиме с добавлением сахарозы в коричневой почве ее активность ингибируется почти в 5 раз по сравнению с контрольным образцом. В контроле этот показатель составлял 12,1 мл  $O_2$ /(г·мин); при сочетанном воздействии — 2,5 мл  $O_2$ /(г·мин). Стоит отметить, что в вариантах без добавления субстрата с разными водными режимами активность каталазы составляла 6,8 мл  $O_2$ /(г·мин) — в варианте с затоплением и

4,8 мл  $O_2$ /(г·мин) в варианте с застойно-промывным режимом; в образце коричневой почвы с сочетанным воздействием затопления и субстрата — 4,2 мл  $O_2$ /(г·мин). Существенное ингибирование каталазы в моделируемых вариантах переувлажнения и оглеения указывает на преобладание восстановительных условий.

Активность ферrireдуктазы во всех вариантах опыта значительно выше, чем в контрольном варианте коричневой почвы при оптимальном увлажнении. Нами установлено, что активность ферrireдуктазы в вариантах с моделированием застойного и застойно-промывного режима выше в среднем на 23 %, чем в контрольном варианте. В вариантах с добавлением субстрата активность ферrireдуктазы увеличивалась до 27 %. Также идет накопление огромного количества закисного железа. Во всех исследуемых вариантах содержание восстановленного железа почти в 11 раз выше, чем в контрольном образце коричневой почвы при оптимальном увлажнении.

В результате проведенных исследований удалось установить тот факт, что процессы переувлажнения и оглеения оказывают пагубное влияние на фитотоксичность коричневой почвы. Наиболее

низкие показатели длины стеблей и корней редиса обнаружались в варианте затопления коричневой почвы раствором с субстратом в виде сахарозы. Все остальные варианты опыта также ниже контрольного. Следует отметить, что разные типы водного режима негативно повлияли на длину и рост стеблевой части, добавление субстрата – на корневую систему тест-организма.

Общая численность бактерий, определенных методом люминесцентной микроскопии, имела максимум в варианте коричневой почвы с сочетанным воздействием застойно-промывного режима и добавлением субстрата (125 % по отношению к контролю). В варианте с застойно-промывным режимом численность бактерий была минимальна (83 %). Добавление субстрата в виде сахарозы на фоне застойного режима не оказало существенного влияния на общую численность бактерий (до 103 %). При затоплении коричневой почвы этот показатель увеличили (119 %).

### Выводы

Почвы, в которых протекают процессы оглеения и переувлажнения, существенно отличаются от автоморфных. Это отражается в физических, физико-химических и эколого-биологических изменениях.

В условиях модельного опыта появляются явные морфохроматические признаки протекания глеегенных процессов, которые проявляются уже в середине эксперимента на фоне как застойного, так и застойно-промывного водного режима с добавлением субстрата. Наблюдается доминирование восстановительных условий и слабокислая реакция среды.

Глееобразование значительно повышает общую численность бактерий, которые в данном случае выступают дублерами микромицетов и актиномицетов. Степень гидроморфизма и оглеения оказывает влияние на ферментативную активность прежде всего за счет развития восстановительных условий, при которых значительно ингибируется активность каталазы. В свою очередь происходит увеличение активности ферриредуктазы и количества нитратов, что объясняется высокой интенсивностью протекания биогенных процессов и накоплением закисных форм железа. На показатели фитотоксичности почвы с использованием редиса в качестве тест-организма процессы переувлажнения и оглеения оказывают угнетающее воздействие.

Глеегенные процессы в условиях застойного режима вызывают незначительные изменения физико-химических свойств и оказывают менее выраженное воздействие на эколого-биологические

свойства почв, что связано с достижением равновесия и закрытостью системы.

Глееобразование в условиях застойно-промывного водного режима вызывает существенное изменение физико-химических свойств и оказывает значительное влияние на все изучаемые эколого-биологические свойства почв. Даже при высокой буферности и плодородности изучаемых почв можно ожидать, что при застойно-промывном режиме через некоторое время произойдет вынос тормозящих оглеение карбонатов, что приведет к необратимым изменениям.

Основываясь на результатах выполненного нами модельного эксперимента, можно прогнозировать, что для плодородных почв Юга России при усилении гидроморфности и создании периодического застойно-промывного режима неизбежно проявление глеегенных процессов и элюирования из почв карбонатов, солей, железа и других элементов. Таким образом, вполне ожидаемы деградиционные изменения с эволюцией в сторону почв, принципиально отличающихся от автоморфных, с радикальным изменением эколого-биологических свойств.

### Литература

1. Казеев К.Ш., Колесников С.И., Вальков В.Ф. Биология почв Юга России. Ростов н/Д., 2004. 350 с.
2. Назаренко О.Г. Современные процессы развития локальных гидроморфных комплексов в степных агроландшафтах : автореф. дис. ... д-ра биол. наук. М., 2002. 46 с.
3. Николаева С.А., Еремина А.М. Трансформация соединений железа в черноземах в условиях повышенной увлажненности почв // Почвоведение. 2001. № 8. С. 963 – 969.
4. Давыдова И.Ю. Трансформация  $E_h$ -рН состояния чернозема в связи с техногенным глееобразованием // Вестн. Рязанского гос. ун-та им. С.А. Есенина. 2005. № 2. С. 91 – 100.
5. Вальков В.Ф., Уманская (Назаренко) О.Г. Изменение минеральной части южного чернозема при глеевом процессе (модельный опыт) // Почвоведение. 1982. № 7. С. 99 – 106.
6. Орлов Д.С., Садовникова Л.К., Садовников Ю.Н. Углеводы в почвах // Агрохимия. 1975. № 3. С. 139 – 152.
7. Зайдельман Ф.Р. Теория образования светлых кислых элювиальных горизонтов почв и ее прикладные аспекты. М., 2010. 248 с.
8. Галстян А.Ш. Ферментативная активность почв Армении. Ереван, 1974. 275 с.
9. Казеев К.Ш., Колесников С.И. Биодиагностика почв: методология и методы исследований. Ростов н/Д., 2012. 204 с.



10. Методы почвенной микробиологии и биохимии / под ред. Д.Г. Звягинцева. М., 1991. 304 с.

11. Хазиев Ф.Х. Методы почвенной энзимологии. М., 1990. 189 с.

12. Бабьева И.П., Зенова Г.М. Биология почв. М., 1989. 336 с.

13. Тюрин И.В. Органическое вещество и его роль в почвообразовании и плодородии. М.; Л., 1937. 287 с.

14. Казеев К.Ш., Фомин С.Е., Колесников С.И., Вальков В.Ф. Биологические свойства локально переувлажненных почв Ростовской области // Почвоведение. 2004. № 3. С. 361 – 372.

#### References

1. Kazeev K.Sh., Kolesnikov S.I., Val'kov V.F. *Biologiya pochv Yuga Rossii* [Soil biology of Southern Russia]. Rostov-on-Don, 2004, 350 p.

2. Nazarenko O.G. *Sovremennye protsessy razvitiya lokal'nykh gidromorfnykh kompleksov v stepnykh agrolandshaftakh* : avtoref. dis. ... d-ra biol. nauk [Modern processes of local hydromorphic complexes in steppe agricultural landscapes]. Moscow, 2002, 46 p.

3. Nikolaeva S.A., Eremina A.M. Transformatsiya soedinenii zheleza v chernozemakh v usloviyakh povyshennoi uvlazhnennosti pochv [The transformation of iron compounds in black earth in conditions of high moisture soil]. *Pochvovedenie*, 2001, no 8, pp. 963-969.

4. Davydova I.Yu. Transformatsiya Eh-pH sostoyaniya chernozema v svyazi s tekhnogennym gleeobrazovaniem [Transformation of Eh-pH condition of humus due to anthropogenic gley formation]. *Vestn. Ryazanskogo gos. un-ta im. S.A. Esenina*, 2005, no 2, pp. 91-100.

5. Val'kov V.F., Umanskaya (Nazarenko) O.G. Izmenenie mineral'noi chasti yuzhnogo chernozema pri

gleevom protsesse (model'nyi opyt) [Changing the mineral part of the southern black soil with gley process (model experiment)]. *Pochvovedenie*, 1982, no 7, pp. 99-106.

6. Orlov D.S., Sadovnikova L.K., Sadovnikov Yu.N. Uglevody v pochvakh [Carbohydrates in soils]. *Agrokimiya*, 1975, no 3, pp. 139-152.

7. Zaidel'man F.R. *Teoriya obrazovaniya svetlykh kislykh elyuvial'nykh gorizontov pochv i ee prikladnye aspekty* [The theory of the formation of bright acid eluvial horizons of soil and its applications]. Moscow, 2010, 248 p.

8. Galstyan A.Sh. *Fermentativnaya aktivnost' pochv Armenii* [The enzymatic activity of the Armenian soil]. Erevan, 1974, 275 p.

9. Kazeev K.Sh., Kolesnikov S.I. *Biodiagnostika pochv: metodologiya i metody issledovaniya* [Soil biodiagnosics: methodology and research methods]. Rostov-on-Don, 2012, 204 p.

10. *Metody pochvennoi mikrobiologii i biokhimii* [Methods of soil microbiology and biochemistry]. Ed. D.G. Zvyagintsev. Moscow, 1991, 304 p.

11. Khaziev F.Kh. *Metody pochvennoi enzimologii* [Methods of soil enzymology]. Moscow, 1990, 189 p.

12. Bab'eva I.P., Zenova G.M. *Biologiya pochv* [Soil biology]. Moscow, 1989, 336 p.

13. Tyurin I.V. *Organicheskoe veshchestvo i ego rol' v pochvoobrazovanii i plodorodii* [Organic matter and its role in soil formation and fertility]. Moscow; Leningrad, 1937, 287 p.

14. Kazeev K.Sh., Fomin S.E., Kolesnikov S.I., Val'kov V.F. Biologicheskie svoystva lokal'no pereuvlazhnennykh pochv Rostovskoi oblasti [Biological properties of locally waterlogged soils of the Rostov region]. *Pochvovedenie*, 2004, no 3, pp. 361-372.

УДК 57.044; 631.46

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-68-71

## ВЛИЯНИЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ТЯЖЕЛЫМИ МЕТАЛЛАМИ И НЕФТЬЮ НА ФИТОТОКСИЧНОСТЬ ПОЧВ ЧЕРНОМОРСКОГО ПОБЕРЕЖЬЯ КАВКАЗА\*

© 2016 г. А.А. Кузина, С.И. Колесников, К.Ш. Казеев, Ю.В. Акименко

Кузина Анна Андреевна – аспирант, кафедра экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Иванковского Южного федерального университета, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: biolog@sfedu.ru

Kuzina Anna Andreevna – Post-Graduate Student, Ecology and Natural Management Department, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Stachki Ave, 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: biolog@sfedu.ru

Колесников Сергей Ильич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, завкафедрой экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Иванковского Южного федерального университета, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: kolesnikov@sfedu.ru

Kolesnikov Sergei Il'ich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Head of Ecology and Natural Management Department, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Stachki Ave, 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: kolesnikov@sfedu.ru

Казеев Камиль Шагидулович – доктор географических наук, профессор, кафедра экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Иванковского Южного федерального университета, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: kamil\_kazeev@mail.ru

Kazeev Kamil Shagidulloevich – Doctor of Geographical Science, Professor, Ecology and Natural Management Department, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Stachki Ave, 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: kamil\_kazeev@mail.ru

Акименко Юлия Викторовна – кандидат биологических наук, ассистент, кафедра экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Иванковского Южного федерального университета, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: biolog@sfedu.ru

Akimenko Yuliya Viktorovna – Candidate of Biological Science, Assistant, Ecology and Natural Management Department, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Stachki Ave, 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: biolog@sfedu.ru

В результате модельных исследований установлено, что загрязнение Cr, Cu, Ni, Pb и нефтью почв Черноморского побережья Кавказа приводит к существенному снижению показателей прорастания и начального роста редиса. По степени негативного воздействия тяжелые металлы образуют следующий ряд: Cr > Cu ≥ Ni > Pb.

**Ключевые слова:** фитотоксичность, загрязнение, тяжелые металлы, хром, медь, никель, свинец, нефть.

As a result of model researches it is established that pollution of Cr, Cu, Ni, Pb and oil of Black Sea Coast soils of the Caucasus leads to essential decrease in indicators of germination and initial growth of a garden radish. On extent of negative impact heavy metals form the following row: Cr > Cu ≥ Ni > Pb.

**Keywords:** phytotoxicity, pollution, heavy metals, chrome, copper, nickel, lead, oil.

Природные условия Черноморского побережья Кавказа чрезвычайно разнообразны. Смена условий увлажнения, сезонная неоднородность, наличие гор и плоскогорий образуют разнообразную гамму природных зон и ландшафтов. Здесь расположены уникальные для России почвы, которые встречаются только в Причерноморье, такие как желтоземы влажных субтропиков, коричневые почвы сухих субтропиков, черноземы южные (каштановые) Тамани [1, 2]. В силу значительных отличий эколого-генетических свойств этих почв, таких как количество гумуса, интенсивность биологических процессов, реакции среды, поглотительной способности и др. [3], почвы Черноморского побережья Кавказа существенно разнятся по устойчивости к антропогенному воздействию.

Степень устойчивости почв к химическому загрязнению лучше всего определять, применяя методы биодиагностики. Биологические показатели пер-

выми реагируют на негативные внешние воздействия. Одним из информативных методов биодиагностики загрязненных почв является определение фитотоксичности по показателям прорастания и интенсивности начального роста растений [4]. Эти показатели отличаются высокой чувствительностью и корреляцией с содержанием в почве загрязняющих веществ, достаточной воспроизводимостью, допустимым варьированием, небольшой ошибкой опыта, простотой, малой трудоемкостью и высокой скоростью методов определения, широкой распространенностью методов и т.д. [5].

Цель настоящей работы – исследовать влияние загрязнения тяжелыми металлами (ТМ) и нефтью на фитотоксичность почв Черноморского побережья Кавказа.

В качестве объектов исследования использованы все основные почвы Черноморского побережья Кавказа: черноземы южные, коричневая выщело-

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (6.345.2014/К).

ченая, коричневая типичная, коричневая карбонатная, бурая лесная кислая, бурая лесная кислая оподзоленная, дерново-карбонатная типичная, дерново-карбонатная выщелоченная, желтозем. В табл. 1 приведены эколого-генетические свойства исследованных почв.

Образцы почв для лабораторного моделирования загрязнения были отобраны в слое 0–10 см, где накапливается основное количество загрязняющих веществ. В качестве загрязняющих веществ были выбраны Cr, Cu, Ni, Pb, поскольку именно ими в значительной степени загрязнены почвы на Юге России [6]. Кроме того, эти ТМ интересны для сравнения – их предельно допустимые концентрации (ПДК) составляют 100 мг/кг почвы. Использовали значения ПДК, разработанные

в Германии [7], так как ПДК в почве общего (валового) содержания меди и никеля в России отсутствуют. Кроме того, ПДК в почве нефти не разработана, поэтому ее содержание в почве выражали в процентах.

ТМ в почву вносили в форме оксидов: CrO<sub>3</sub>, CuO, NiO, PbO. Их существенная доля поступает в почву именно в этой форме [8]. Применение оксидов ТМ исключает воздействие на показатели почвы сопутствующих анионов, как это бывает при внесении солей металлов.

Почву инкубировали в течение 30 сут в вегетационных сосудах при комнатной температуре (+20÷22 °С) и оптимальном увлажнении (60 % полной влагоемкости) в трехкратной повторности.

Таблица 1

Места отбора почв Черноморского побережья Кавказа и их эколого-генетические характеристики

Почва	Место отбора	Координаты	Содержание гумуса, %	pH	Гранулометрический состав
Чернозем южный	Темрюкский район, г. Тамань	45°10'51.73"N 36°41'30.47"E	3,2	7,7	Тяжелосуглинистый
Коричневая типичная	Анапский р-н, ГПЗ «Утриш»	44°46.764 E. 37°31.702 N	9,3	7,2	Тяжелосуглинистый
Коричневая карбонатная	Анапский р-н, ГПЗ «Утриш»	44°47.139 E 37°24.971 N	15,0	7,0	Среднесуглинистый
Коричневая выщелоченная	Анапский р-н, ГПЗ «Утриш»	44°45.880 E 37°26.958 N	6,8	7,1	Тяжелосуглинистый
Буря лесная кислая	Туапсинский р-н, с. Горское	44°23.342' N 038°43.894' E	1,3	4,4	Тяжелосуглинистый
Буря лесная кислая оподзоленная	г. Сочи, Лазаревский р-н, Сочинский национальный парк	43°52.048' N 039°24.214' E	1,7	4,1	Легкосуглинистый
Дерново-карбонатная типичная	Туапсинский р-н, п. Джубга	44°19.624' N 038°41.636' E	5,4	7,5	Тяжелосуглинистый
Дерново-карбонатная выщелоченная	г. Сочи, Хостинский р-н, Кавказский заповедник, Тисосамшитовая роща	43°31.683' N 39°52.412' E	4,8	6,9	Тяжелосуглинистый
Желтозем	г. Сочи, Адлерский р-н	43°27.445' N 039°56.952' E	3,2	5,2	Тяжелосуглинистый

О фитотоксичности почв судили по показателям прорастания и интенсивности начального роста редиса (сорт Корунд). Семена редиса имеют сравнительно маленький запас питательных веществ и поэтому более подвержены влиянию окружающей среды, в частности загрязнению [5].

В результате исследования было установлено, что загрязнение почв Черноморского побережья Кавказа Cr, Cu, Ni, Pb, нефтью, как правило, ухудшает показатели прорастания и интенсивность начального роста редиса, в частности длину корней (табл. 2). В большинстве случаев наблюдается прямая зависимость между содержанием загрязняющего вещества и степенью ухудшения исследуемого показателя почвы.

Причины негативного влияния ТМ на прорастание семян можно объяснить как прямым действием химических веществ, нарушающих процессы метаболизма в прорастающих семенах, так и косвенным,

закрывающимся в нарушении структуры микробиоценоза и стимулирующим развитие фитотоксичной микрофлоры [9]. Нефть закупоривает каналы и поры почвы, нарушая воздухо- и влагообмен и ухудшая условия развития растений [10].

По степени негативного влияния на прорастание и развитие редиса ТМ образуют следующий ряд, обобщенный для разных типов и подтипов почв Черноморского побережья Кавказа: Cr > Cu ≥ Ni > Pb.

Поскольку ПДК всех четырех исследованных ТМ одинаковы – 100 мг/кг – возможно корректное сравнение их токсического действия по отношению к исследованным биологическим показателям. Полученные результаты свидетельствуют о том, что наиболее значительное негативное воздействие оказал хром.

Как правило, для всех исследованных ТМ и нефти наблюдалась прямая зависимость между содержанием в почве загрязняющего вещества и степенью снижения биологических показателей.

Таблица 2

## Влияние химического загрязнения почв Черноморского побережья Кавказа на длину корней редиса

Элемент	Доза загрязняющего вещества				
	Контроль	1 ПДК (1 %)	10 ПДК (5 %)	100 ПДК (10 %)	НСП <sub>05</sub>
<b>Чернозем южный</b>					
Cr	100	46	13	0	9
Cu	100	90	58	31	4
Ni	100	89	63	33	5
Pb	100	99	64	28	6
Нефть	100	79	85	36	9
НСП <sub>05</sub>		11	10	6	
<b>Коричневая типичная</b>					
Cr	100	72	10	2	13
Cu	100	86	84	72	6
Ni	100	75	62	29	7
Pb	100	84	68	59	7
Нефть	100	79	85	12	8
НСП <sub>05</sub>		10	10	6	
<b>Коричневая выщелоченная</b>					
Cr	100	61	11	0	
Cu	100	69	70	39	
Ni	100	78	53	41	
Pb	100	81	65	36	
Нефть	100	79	85	7	
НСП <sub>05</sub>		10	10	5	
<b>Коричневая карбонатная</b>					
Cr	100	54	27	0	11
Cu	100	55	71	53	9
Ni	100	68	51	62	8
Pb	100	64	63	51	10
Нефть	100	79	85	8	9
НСП <sub>05</sub>		9	10	7	
<b>Бурая лесная кислая</b>					
Cr	100	44	34	0	11
Cu	100	36	17	13	9
Ni	100	28	23	19	8
Pb	100	45	39	19	10
Нефть	100	20	12	3	9
НСП <sub>05</sub>		4	4	2	
<b>Бурая лесная кислая оподзоленная</b>					
Cr	100	19	5	0	11
Cu	100	12	9	7	9
Ni	100	12	8	9	8
Pb	100	8	9	3	10
Нефть	100	13	10	6	9
НСП <sub>05</sub>		1	1	1	
<b>Дерново-карбонатная типичная</b>					
Cr	100	42	29	0	11
Cu	100	78	59	17	9
Ni	100	88	46	29	8
Pb	100	93	57	28	10
Нефть	100	85	67	28	9
НСП <sub>05</sub>		11	8	5	
<b>Дерново-карбонатная выщелоченная</b>					
Cr	100	35	19	0	11
Cu	100	67	49	27	9
Ni	100	78	42	29	8
Pb	100	83	59	31	10
Нефть	100	78	54	25	9
НСП <sub>05</sub>		10	7	5	
<b>Желтозем</b>					
Cr	100	44	14	8	11
Cu	100	78	59	20	9
Ni	100	87	70	33	8
Pb	100	91	69	48	10
Нефть	100	69	35	22	9
НСП <sub>05</sub>		10	8	6	

В ходе исследования была проведена сравнительная оценка влияния загрязнения на длину корней редиса для основных почв Черноморского побережья Кавказа при загрязнении ТМ и нефтью (почвы расположены по мере снижения их устойчивости): коричневая типичная (69)  $\geq$  чернозем южный (66)  $\geq$  коричневая выщелоченная (64) = коричневая карбонатная (64)  $\geq$  желтозем (62) = дерново-карбонатная типичная (62)  $\geq$  дерново-карбонатная выщелоченная (59)  $>$  бурая лесная кислая (43)  $>$  бурая лесная кислая оподзоленная (32). В скобках представлены значения длины корней редиса относительно контроля (100 %), усредненные для трех доз загрязняющего вещества.

Установленная последовательность определяется эколого-генетическими свойствами исследованных почв (табл. 1), прежде всего щелочно-кислотными; содержанием органического вещества и гранулометрическим составом, что влияет на подвижность ТМ в почве; окислительно-восстановительными условиями и биологической активностью, обуславливающими скорость разложения в почве нефти.

### Выводы

1. Загрязнение почв Черноморского побережья Кавказа нефтью, хромом, медью, никелем, свинцом ухудшает прорастание и начальное развитие редиса.

2. По степени негативного влияния на показатели прорастания и начального развития растений на почвах Черноморского побережья Кавказа ТМ образуют следующий ряд: Cr  $>$  Cu  $\geq$  Ni  $>$  Pb.

3. По степени усиления фитотоксических свойств при загрязнении ТМ и нефтью почвы Черноморского побережья Кавказа образуют следующий ряд: коричневая типичная  $\geq$  чернозем южный  $\geq$  коричневая выщелоченная = коричневая карбонатная  $\geq$  желтозем = дерново-карбонатная типичная  $\geq$  дерново-карбонатная выщелоченная  $>$  бурая лесная кислая  $>$  бурая лесная кислая оподзоленная.

### Литература

1. Шоба С.А., Добровольский Г.В., Алябина И.О. Национальный атлас почв Российской Федерации. М., 2011. 632 с.
2. Казеев К.Ш., Вальков В.Ф., Колесников С.И. Атлас почв юга России. Ростов н/Д., 2010. 128 с.
3. Вальков В.Ф., Казеев К.Ш., Колесников С.И. Почвы юга России. Ростов н/Д., 2008. 320 с.
4. Казеев К.Ш., Колесников С.И. Биодиагностика почв: методология и методы исследований. Ростов н/Д., 2012. 260 с.
5. Колесников С.И., Казеев К.Ш., Вальков В.Ф. Биоэкологические принципы мониторинга и нормирования загрязнения почв. Ростов н/Д., 2001. 65 с.

6. Алексеенко В.А., Суворинов А.В., Власова Е.В. Металлы в окружающей среде. Прибрежные аквальные ландшафты Черноморского побережья России. М., 2012. 360 с.

7. Касьяненко А.А. Контроль качества окружающей среды. М., 1992. 136 с.

8. Kabata-Pendias A. Trace Elements in Soils and Plants. 4th Edition. Boca Raton, 2010. P. 548.

9. Вальков В.Ф., Колесников С.И., Казеев К.Ш. Влияние загрязнения тяжелыми металлами на фитотоксичность чернозема // Агрехимия. 1997. № 6. С. 50 – 55.

10. Колесников С.И., Казеев К.Ш., Татосян М.Л., Вальков В.Ф. Влияние загрязнения нефтью и нефтепродуктами на биологическое состояние чернозема обыкновенного // Почвоведение. 2006. № 5. С. 616 – 620.

### References

1. Shoba S.A., Dobrovolskii G.V., Alyabina I.O. *Natsionalnyi atlas pochv Rossiiskoi Federatsii* [National atlas of the Russian Federation soil]. Moscow, 2011, 632 p.
2. Kazeev K.Sh., Val'kov V.F., Kolesnikov S.I. *Atlas pochv yuga Rossii* [Atlas soils of Southern Russia]. Rostov-on-Don, 2010, 128 p.
3. Val'kov V.F., Kazeev K.Sh., Kolesnikov S.I. *Pochvy yuga Rossii* [The soils of the South of Russia]. Rostov-on-Don, 2008, 320 p.
4. Kazeev K.Sh., Kolesnikov S.I. *Biodiagnostika pochv: metodologiya i metody issledovaniya* [Soil biagnostics: methodology and research methods]. Rostov-on-Don, 2012, 260 p.
5. Kolesnikov S.I., Kazeev K.Sh., Val'kov V.F. *Bioekologicheskie printsipy monitoringa i normirovaniya zagryazneniya pochv* [Bioecological principles of monitoring and regulation of soil contamination]. Rostov-on-Don, 2001, 65 p.
6. Alekseenko V.A., Suvorinov A.V., Vlasova E.V. *Metally v okruzhayushchei srede. Pribrezhnye akval'nye landshafty Chernomorskogo poberezh'ya Rossii* [Metals in the environment. Coastal aquatic landscapes of the Black Sea Coast of Russia]. Moscow, 2012, 360 p.
7. Kas'yanenko A.A. *Kontrol' kachestva okruzhayushchei sredy* [Monitoring environmental quality]. Moscow, 1992, 136 p.
8. Kabata-Pendias A. *Trace Elements in Soils and Plants*. 4th Edition. Boca Raton, 2010, p. 548.
9. Val'kov V.F., Kolesnikov S.I., Kazeev K.Sh. *Vliyanie zagryazneniya tyazhelymi metallami na fitotoksichnost' chernozema* [Influence of heavy metal pollution in the black soil phytotoxicity]. *Agrokhimiya*, 1997, no 6, pp. 50-55.
10. Kolesnikov S.I., Kazeev K.Sh., Tatosyan M.L., Val'kov V.F. *Vliyanie zagryazneniya nef'tyu i nef'teproduktami na biologicheskoe sostoyanie chernozema obyknovennogo* [The impact of oil pollution and oil products on the biological condition of chernozem ordinary]. *Pochvovedenie*, 2006, no 5, pp. 616-620.

УДК 575.22:582.632.2

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-72-77

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗУЧЕНИЯ ФЕНОЛОГИЧЕСКИХ ФОРМ *QUERCUS ROBUR* L. С ПОМОЩЬЮ ISSR-МАРКЕРОВ\*

© 2016 г. В.А. Чохели, Б.Л. Козловский, М.М. Серeda, Т.В. Вардуну

Чохели Василий Александрович – аспирант, младший научный сотрудник, кафедра генетики, факультет биологических наук, Ботанический сад Академии биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов-на-Дону, 344041, e-mail: vachokheli@sfned.ru

Chokheli Vasiliyi Aleksandrovich – Post-Graduate Student, Junior Researcher, Department of Genetics, Faculty of the Biological Science, Botanical Garden of the Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Botanicheskii Spusk, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, e-mail: vachokheli@sfned.ru

Козловский Борис Леонидович – кандидат биологических наук, научный сотрудник, Ботанический сад Академии биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов-на-Дону, 344041, e-mail: ecostyle2@yandex.ru

Kozlovskiy Boris Leonidovich – Candidate of Biological Science, Researcher, Botanical Garden of the Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Botanicheskii Spusk, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, e-mail: ecostyle2@yandex.ru

Серeda Михаил Михайлович – кандидат биологических наук, доцент, кафедра ботаники, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов-на-Дону, 344041, e-mail: seredam@yandex.ru

Sereda Mikhail Mikhailovich – Candidate of Biological Science, Associate Professor, Department of Botany, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Botanicheskii Spusk, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, e-mail: eredam@yandex.ru

Вардуну Татьяна Викторовна – доктор педагогических наук, доцент, профессор, кафедра генетики, факультет биологических наук, директор Ботанического сада Академии биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов-на-Дону, 344041, e-mail: varduny@yandex.ru

Varduni Tatiana Viktorovna – Doctor of Pedagogical Science, Associate Professor, Professor, Department of Genetics, Faculty of the Biological Science, Director of Botanical Garden of the Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Botanicheskii Spusk, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, e-mail: varduny@yandex.ru

Проведена генетическая идентификация форм *Quercus robur* L. из искусственной популяции Ботанического сада ЮФУ с помощью ISSR-маркеров. Объекты исследования – фенологические формы: *Q. r. var. praecox* Czern. и *Q. r. var. tardiflora* Czern. Результативным оказался праймер с последовательностью (GA)<sub>8</sub>YC. Установлен высокий полиморфизм в группе образцов *Q. robur*, отобранных из искусственной популяции Ботанического сада ЮФУ. Выявлено, что методика не позволяет четко разделить фенологические формы *Q. robur*. Вместе с тем ISSR-маркеры могут использоваться для генетической паспортизации уникальных и коллекционных образцов видов рода *Quercus* и последующей их идентификации.

**Ключевые слова:** *Quercus robur* L., фенологические формы, генетическая паспортизация, ISSR-метод, онтогенез, дендрограмма.

Conducted genetic identification of the forms of *Quercus robur* L. from artificial populations of the Botanical garden of Southern Federal University with the help of ISSR markers. The objects of study served as phenological forms: *Q. r. var. praecox* Czern. and *Q. r. var. tardiflora* Czern. Scoring was primer with sequence (GA)<sub>8</sub>YC. Also, the high polymorphism in the sample group *Q. robur*, selected from artificial populations of the Botanical garden of SFU. It is revealed that the method does not allow to clearly separate phenological forms of *Q. robur*. However, ISSR markers can be used for genetic certification of unique and collectible specimens of species of the genus *Quercus*, and their subsequent identification.

**Keywords:** *Quercus robur* L., phenological forms, genetic certification, ISSR method, ontogenesis, dendrogramm.

Большой проблемой зеленого строительства и лесного хозяйства степной зоны Юга России является сокращение в условиях культуры продолжительности онтогенеза как у аборигенных, так и у

адвентивных интродуцированных видов древесных растений. Так, продолжительность онтогенеза таких долговечных видов, как *Celtis australis* L., *Celtis occidentalis* L., *Gymnocladus dioica* (L.) K. Koch,

\* Исследование выполнено в рамках базовой части государственного задания № 213.01-11/2014-34 в сфере научной деятельности по теме «Развитие комплексных подходов к изучению и инвентаризации биоразнообразия степной зоны юга России». Использовано оборудование ЦКП «Биотехнология, биомедицина и экологический мониторинг», ЦКП «Высокие технологии», лаборатории экологии и физиологии растений и лаборатории клеточных и геномных технологий растений Ботанического сада Академии биологии и биотехнологии Южного федерального университета.

*Juglans nigra* L., *Morus alba* L., *Quercus robur* L., *Quercus macrocarpa* Michx., *Robinia pseudoacacia* L., *Ulmus pumila* L., в пределах Ростовской городской агломерации составляет 80÷90 лет, а возраст вступления в сенильную стадию – 60÷70 лет [1, 2]. Для решения этой проблемы необходимы поиск перспективных образцов среди долговечных пород, их генетическая идентификация и паспортизация, селекционная работа. В этой связи интерес представляют фенологические формы *Q. robur* L., описанные В.М. Черняевым [3] в 1858 г., – *Q. robur var. praecox* Czern. и *Q. robur var. tardiflora* Czern. Ряд авторов отмечает у этих форм наличие значительных различий в экологии, а также росте и развитии [4–10]. Ранее в Ботаническом саду ЮФУ был выявлен и описан [11] перспективный образец *Q. robur var. tardiflora*, значительно превосходящий по продолжительности онтогенеза другие образцы.

Цель работы – генетическая идентификация фенологических форм *Q. robur* из искусственной популяции дубов Ботанического сада ЮФУ с помощью ISSR-маркеров.

В соответствии с целью были поставлены следующие задачи:

1. Отобрать из искусственной популяции *Q. robur* образцы, соответствующие по фенологическому ритму *Q. robur var. praecox* и *Q. robur var. tardiflora*.

2. Сравнить отобранные формы с помощью микросателлитного анализа.

3. Определить возможность наследования в семенных поколениях свойств плюсовых образцов.

4. Оценить возможности использования ISSR-маркеров для оценки внутривидовой изменчивости *Q. robur* и последующего отбора перспективных форм.

#### Объекты и методы исследования

Объектами исследования послужили образцы фенологических форм *Q. robur* из искусственной популяции Ботанического сада ЮФУ.

У основной части образцов экстракция ДНК проводилась из освобожденных от чешуй покоящихся почек, у трехлетних сеянцев – из молодых листьев.

Выделение ДНК осуществлялось с помощью набора «Сорб-ГМО-А» (производство «Синтол»). Для анализа выделенного ДНК использовался ISSR-метод. Был применен праймер UBC 841 с последовательностью (GA)<sub>8</sub>YC и температурой отжига 52 °C из набора 100/9 University British Columbia (UBC).

ПЦР-смесь готовили из расчёта на один образец: H<sub>2</sub>O (DD) – 15,8 мкл; раствор 10x dNTP – 2,5 мкл; 10x буфер для ПЦР – 2,5 мкл; Mg –

2,5 мкл; Taq-полимеразы – 0,2 мкл; ДНК-образец – 1 мкл и праймер – 0,5 мкл. Общий объём смеси – 25 мкл.

Аmplification проводилась на термоциклере T100 Thermal Cycler. Протокол амплификации: 1. 94 °C – 1:00. 2. 94 °C – 0:30. 3. 52/53 °C – 0:45. 4. 72 °C – 2:00. 5. 35 циклов, начиная со второго пункта. 6. 72 °C – 5:00. 7. Хранение при 4 °C.

Разделение фрагментов проводили электрофорезом в 2%-м агарозном геле с использованием TBE-буфера (Tris, Boric acid, EDTA) на мощности 100 В, 1,5 ч, источник питания – PowerPac Basic.

Окрашивание ДНК производили интеркалирующим красителем SYBR Green I из соотношения 1 мкл красителя на 5 мкл ДНК, съёмку – в геледокументирующей системе Gel Doc XR+ с программным обеспечением Image Lab версии 4.1.

Маркер длин ДНК фрагментов 100+ bp DNA Ladder добавляли по 7 мкл в лунку.

Иерархический кластерный анализ проводился методами Neighbor-Joining (NJ) и Unweighted pair-group average (UPGMA) с использованием TREECON (version 1.3b) и PyEPh 1.4. Матрица сходства и генетической дистанции построена по коэффициенту Жаккарда с помощью программы Winboot [12].

#### Результаты и их обсуждение

В пределах искусственной популяции *Q. robur* на территории Ботанического сада преимущественно встречаются экземпляры *Q. robur var. praecox*. Образцы отобраны из трех разных генераций: № 1, 2 взяты из парковых насаждений Ботанического сада (год посадки – 1930); № 3 – из защитных насаждений коллекции орехоплодных растений (год посадки – 1963); № 4, 5 – из насаждений дендрария (год посадки – 1975). Кроме того, для анализа была взята колоновидная форма *Q. robur*, полученная из семян от сортового экземпляра *Q. robur Fastigiata*.

Из популяции были отобраны два образца, соответствующие по фенологическому циклу *Quercus robur var. tardiflora* – первый (№ 6) – 1888 г. посадки, второй (№ 12) – 1975 г.

Основные фенологические особенности, позволяющие диагностировать форму *Q. robur var. tardiflora* [13]:

1. Распускание почек, облиствение, цветение, начало и окончание роста побегов происходит на 2–3 недели позже.

2. Отмершие листья осенью не опадают и в таком виде остаются на побегах до конца зимы.

Наибольший интерес представляет образец *Q. robur var. tardiflora* № 6, описанный ранее

Б.Л. Козловским с соавторами [11]. В отличие от экземпляров *Q. robur* var. *praecox*, высаженных в сходных условиях в парке Ботанического сада в 1930 г. и находящихся в сенильной стадии или уже отмерших, этот образец не имеет признаков старения. От описанной В.М. Черняевым разновидности *Q. robur* var. *tardiflora* он отличается тем, что сбрасывает листья в типичные сроки, что существенно повышает его декоративные качества. Этот образец в настоящее время имеет высоту 26 м, диаметр ствола – 108 см и оценивается нами как плюсовой для получения семенных поколений и селекционной работы.

Годовой срез фенологического цикла образцов *Q. robur* представлен в табл. 1.

Таблица 1

Фенологический цикл образцов *Q. robur* в 2014 г.

Фенологическая фаза	Календарная дата		
	<i>Q. r. var. praecox</i> № 1	<i>Q. r. var. tardiflora</i> № 6	<i>Q. r. var. tardiflora</i> № 12
Распускание почек	10.IV	24.IV	21.IV
Начало роста побегов	14.IV	26.IV	25.IV
Распускание листьев	14.IV	26.IV	25.IV
Начало цветения	20.IV	26.IV	25.IV
Конец цветения	30.IV	3.V	2.V
Полное облиствение	7.V	12.V	12.V
Окончание роста побегов	15.V	18.V	18.V
Вторичный рост побегов	26.V	–	28.V
Полное вызревание побегов	10.VII	–	10.VII
Массовое созревание семян	4.IX	7.IX	10.IX
Массовое опадание плодов	10.IX	14.IX	14.IX
Массовое окрашивание	15.X	15.X	15.X
Массовый листопад	27.X	30.X	Зима, начало весны последующего года

Оба образца *Q. robur* var. *tardiflora* являются высокозимостойкими – после типичных и экстремальных зим повреждений не наблюдается. Засухоустойчивы – хорошо растут и развиваются без полива, засуху переносят без повреждения надземных органов, почки и семена нормального развития, хорошо растут и цветут в следующий после засухи год. Листья поражаются листогрызущими насекомыми и мучнистой росой. В отдельные годы образец № 6 «уходит» от первой генерации дубовой листовертки из-за более поздних сроков распускания листьев. Цветет регулярно, но плодоносит с периодичностью в 2–3 года. Для хорошего

плодоношения дуб нуждается в перекрестном опылении, что для данной формы невозможно из-за расхождения фенологических ритмов с другими образцами искусственной популяции. Предположительно происходит самоопыление. Пораженных семядами желудей – 10±30 %, неповрежденные семена имеют высокую всхожесть (до 100 %). Декоративная долговечность – более 100 лет.

Получены семенные поколения выделенных форм *Q. robur* var. *tardiflora* путем осеннего посева семян. В семенных поколениях хорошо повторяются фенологические особенности материнского растения (образец № 6) – сеянцы начинают вегетировать в среднем на 10 дней позже, чем сеянцы от образцов *Q. robur* var. *praecox*.

Ранее установлено [14], что 841-й праймер обладает высокой специфичностью по отношению к взятым образцам; аналогичный результат был получен Aimara Lopez-Aljorna с соавторами [15] при изучении *Q. suber* L. Выяснилось, что использование буфера для полимеразы без антител не дает четкой картины на электрофореграмме (рис. 1), что, вероятно, связано с присутствием дубильных веществ.

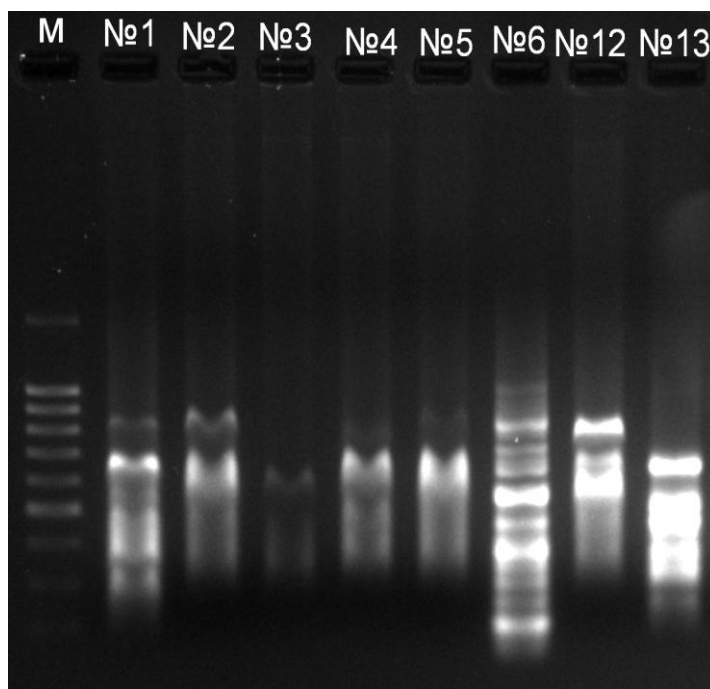


Рис. 1. Результат ПЦР-детекции образцов *Q. robur* с праймером UBC 841 с использованием буфера без антител (номера на рисунке соответствуют номерам образцов)

Использование буфера с антителами, высокой разрешающей способностью, содержащего вещества, снижающие активность ферментов – ингибиторов ПЦР-детекции, дало удовлетворительный результат (рис. 2).



На рис. 2 видно, что фореграммы семянцев № 7–11, произошедших от образца *Q. r. var. tardiflora* № 6, визуальнo значительно отличаются от остальных образцов.

На основе полученной фореграммы были построены дендрограммы генетического сходства исследуемого материала. При этом использованы методы попарного внутригруппового невзвешенного среднего (Unweighted Pair Group Method with Arithmetic Mean, UPGMA) – рис. 3 и присоединения соседей (Neighbor-Joining, NJ) – рис. 4.

Полученные дендрограммы дают сходные результаты по следующим позициям:

– *Q. robur var. tardiflora* № 9, № 12 лежит вне клад;

– *Q. robur var. tardiflora* № 6 образует клады совместно *Q. robur var. praecox* № 4;

– сеянцы, полученные от *Q. robur var. tardiflora* № 6 (образцы № 7–11), распределяются по разным кладам, несмотря на общее происхождение и сходство в фенологии.

Для оценки генетического сходства был использован коэффициент Джакарта. Генетическое сходство для пар образцов дуба представлено в табл. 2.

Наиболее генетически близки образцы *Q. robur var. praecox* № 1 и *Q. robur var. praecox* № 2. При этом наиболее генетически удаленными являются № 7, 8; № 8, 10; № 12, 11; № 7, 11; № 1, 7; № 2, 7; № 3, 8; № 3, 11; № 3, 1; № 3, 2; № 5, 9; № 5, 3; № 7, 13; № 10, 13.

Из таблицы следует, что выделенный как плюсовой образец *Q. robur var. tardiflora* № 6 имеет относительно высокое сходство с образцами *Q. robur var. praecox* (№ 1–5) и при этом низкую степень сходства с собственным семенным поколением (образцы № 7–11), что может быть результатом эффекта инцухта при самоопылении. При этом, как отмечено выше, *Q. robur var. tardiflora* № 6 также по фенотипическим признакам значительно отличается от остальных образцов.

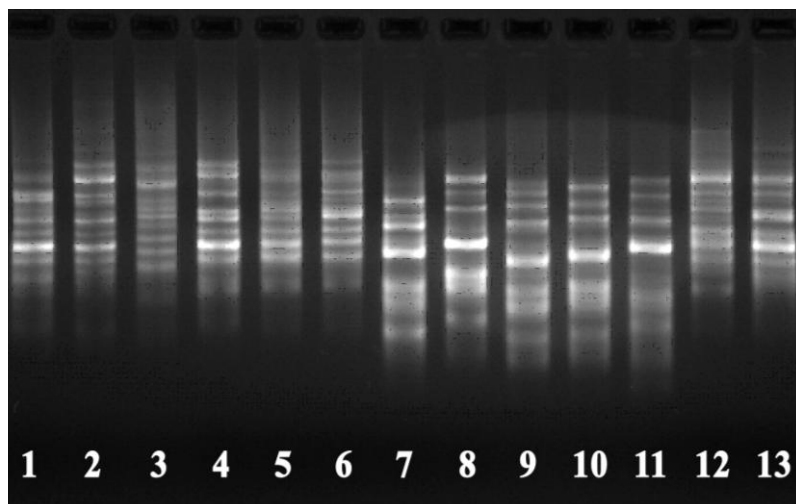


Рис. 2. Результат ПЦР-детекции образцов *Q. robur* с праймером UBC 841 (номера на рисунке соответствуют номерам образцов)

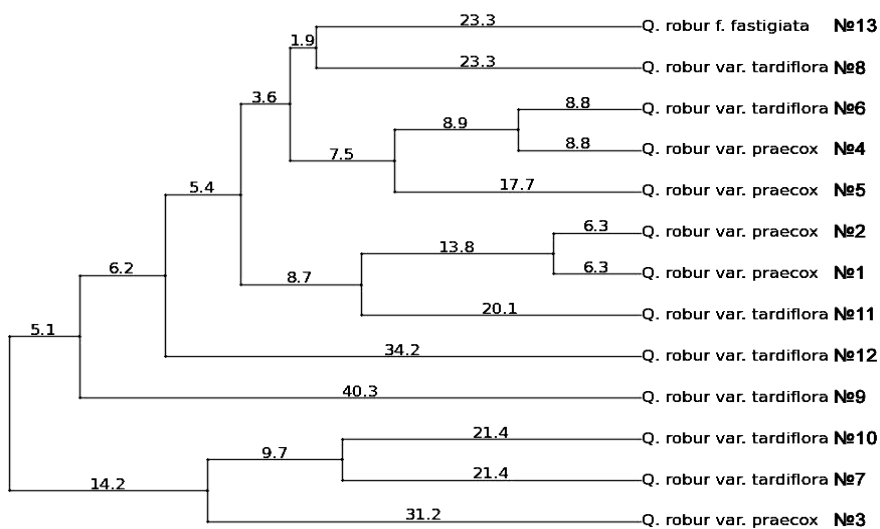


Рис. 3. Дендрограмма, построенная методом UPGMA

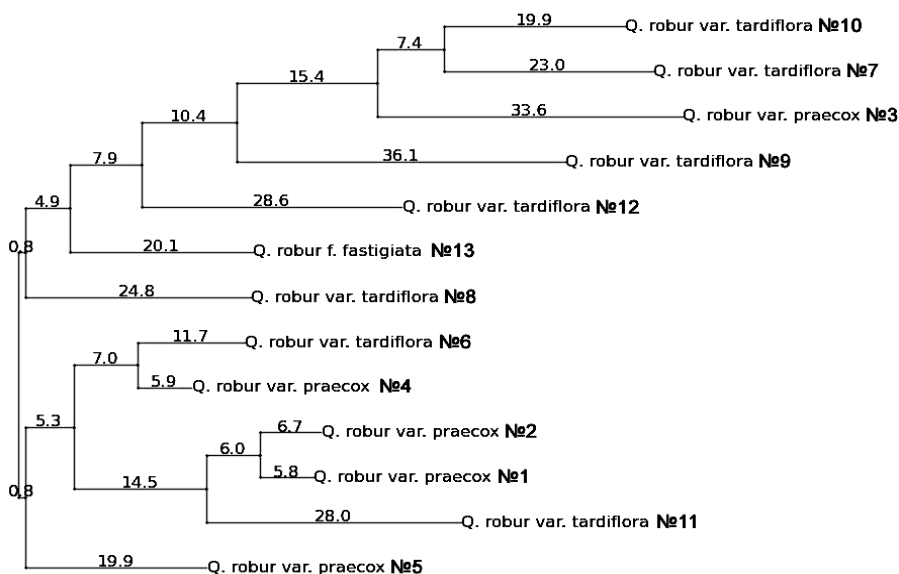


Рис. 4. Дендрограмма, построенная методом NJ

Таблица 2

Генетическое сходство исследуемых образцов *Q. robur*

Номер образца	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10	№ 11	№ 12	№ 13
1	1,000												
2	0,778	1,000											
3	0,000	0,000	1,000										
4	0,455	0,500	0,059	1,000									
5	0,273	0,231	0,000	0,455	1,000								
6	0,250	0,308	0,063	0,700	0,500	1,000							
7	0,000	0,000	0,273	0,077	0,091	0,083	1,000						
8	0,364	0,308	0,000	0,308	0,364	0,333	0,000	1,000					
9	0,182	0,154	0,071	0,154	0,000	0,077	0,222	0,167	1,000				
10	0,077	0,067	0,231	0,143	0,167	0,071	0,333	0,000	0,083	1,000			
11	0,400	0,455	0,000	0,333	0,167	0,250	0,000	0,154	0,083	0,077	1,000		
12	0,154	0,133	0,063	0,308	0,250	0,231	0,083	0,143	0,167	0,071	0,000	1,000	
13	0,273	0,231	0,067	0,333	0,400	0,250	0,000	0,364	0,083	0,000	0,077	0,364	1,000

В целом анализ показывает высокий полиморфизм в группе образцов *Q. robur*, отобранных из искусственной популяции Ботанического сада ЮФУ. Очевидно, что использованная методика не позволяет четко разделить фенологические формы *Q. robur*, тем более что сроки наступления фенологических фаз, скорее всего, кодируются полигеном. Вместе с тем ISSR-маркеры могут с высокой надежностью использоваться для генетической паспортизации уникальных и коллекционных образцов видов рода *Quercus* и последующей их идентификации в случае необходимости.

### Заключение

ISSR-маркеры могут быть использованы для паспортизации образцов *Q. robur*, при этом не позволяют с необходимой надежностью отделить форму *Q. robur var. tardiflora* от *Q. robur var. praecox*. Четкий рисунок фореграмм позволяет использовать буфер с антителами, высокой разрешающей способностью, в котором содержались вещества, снижающие активность ферментов. Для дальнейших исследований следует привлечь такие методы, как RAPD (Random Amplified Polymorphic DNA) с использованием рандомных праймеров со случайной последовательностью и RFLP-анализ (Restriction Fragment Length Polymorphism) с использованием рестриктаз.

Полученные дендрограммы дают сходные результаты по следующим позициям:

- *Q. robur var. tardiflora* № 9, № 12 лежит вне клад;
- *Q. robur var. tardiflora* № 6 образует клады совместно *Q. robur var. praecox* № 4;
- сеянцы, полученные от *Q. robur var. tardiflora* № 6 (образцы № 7–11), распределяются по разным

кладам, несмотря на общее происхождение и сходство в фенологии.

### Литература

1. Анищенко Л.В., Бурлуцкая Л.В., Жегулова И.В., Мальцева А.Н., Миронова Н.В., Козловский Б.Л., Куропятников М.В., Стефановская Е.В., Федоринова О.И., Фирсова А.В., Фирсова А.В., Шишлова Ж.Н., Шмареева А.Н. Коллекции растений Ботанического сада ЮФУ. Каталог растений, прошедших интродукционное испытание / под ред. В.В. Федаевой. Ростов н/Д., 2014. 357 с.
2. Козловский Б.Л., Огородникова Т.К., Куропятников М.В., Федоринова О.И. Ассортимент древесных растений для зеленого строительства в Ростовской области. Ростов н/Д., 2009. 416 с.
3. Черняев В.М. О лесах Украины. М., 1858. 54 с.
4. Вересин М.М. О фенологических формах дуба черешчатого и использовании их в лесоразведении // Изв. вузов. Лесн. журн. 1958. № 3. С. 3 – 15.
5. Миленин А.И. Экологические особенности фенологических разновидностей дуба черешчатого (*Quercus robur* L.) в условиях ЦЧР : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук. Воронеж, 1997. 24 с.
6. Молчанов А.Г. Интенсивность фотосинтеза фенологических форм дуба черешчатого в условиях недостаточного увлажнения // Лесоведение. 2012. № 4. С. 31 – 38.
7. Рубцов В.В., Жиренко Н.Г., Уткина И.А. Интенсивность тока пасоки у разных фенологических форм дуба в южной лесостепи // Лесоведение. 2007. № 5. С. 44 – 55.
8. Сильченко И.И. Фенологические формы дуба черешчатого (*Quercus robur* L.) в различных типах ландшафтов Брянской области // Вестн. Брянского гос. ун-та. 2012. № 4. С. 158 – 161.
9. Bobinac M., Batos B., Miljkovi D., Radulovi S. Polycyclism and phenological variability in the common

oak (*Quercus robur* L.) // Archives of biological sciences. 2012. Vol. 64, № 1. P. 97 – 105.

10. Trudic B., Galovic V., Orlovic S., Pap P., Pecek S. A strategy for the identification of a candidate gene for drought induced stress in pendunculate oak (*Quercus robur* L. (*Q. pedunculata* Ehrh.)), Fagaceae // Bulgarian J. of Agricultural Science. 2012. Vol. 19. № 2. P. 338 – 346.

11. Козловский Б.Л., Федоринова О.И., Куропятников М.В. Новый перспективный для зеленого строительства и лесоразведения в Ростовской области образец *Quercus robur* L. // Политем. сетевой электр. науч. журн. Куб. гос. аграр. ун-та (Научный журнал КубГАУ). 2015. Т. 2, № 106. С. 580 – 591.

12. Yap I.V., Nelson R.J. WinBoot: A program for performing bootstrap analysis of binary data to determine the confidence limits of UPGMA-based dendrograms. Manila, Philippines, 1996. 22 p.

13. Щепотьев Ф.Л. Дендрология. М.; Л., 1949. 347 с.

14. Чохели В.А., Козловский Б.Л., Середя М.М., Вардуну Т.В. Анализ генетической изменчивости образцов *Quercus robur* L. из искусственной популяции Ботанического сада ЮФУ // Биоразнообразие. Биоконсервация. Биомониторинг : сб. материалов II Междунар. науч.-практ. конф. Майкоп, 2015. С. 130 – 133.

15. Lopez-Aljorna A., Bueno M.A., Aguinalde I., Martrin J.P. Fingerprinting and genetic variability in cork oak (*Quercus suber* L.) elite trees using ISSR and SSR markers // Ann. For. Sci. 2007. № 64. P. 773 – 779.

#### References

1. Anishchenko L.V., Burlutskaya L.V., Zhegulova I.V., Mal'tseva A.N., Mironova N.V., Kozlovskii B.L., Kuropyatnikov M.V., Stefanovskaya E.V., Fedorinova O.I., Firsova A.V., Firsova A.V., Shishlova Zh.N., Shmaraeva A.N. Kollektzii rastenii Botanicheskogo sada YuFU. Katalog rastenii, proshedshikh introduktsionnoe ispytanie [Plant collections of the Botanical Garden of SFU. Catalog of plants that have passed introductory test]. Ed. V.V. Fedyaeva. Rostov-on-Don, 2014, 357 p.

2. Kozlovskii B.L., Ogorodnikova T.K., Kuropyatnikov M.V., Fedorinova O.I. Assortiment drevesnykh rastenii dlya zelenogo stroitel'stva v Rostovskoi oblasti [The range of woody plants for green building in the Rostov region]. Rostov-on-Don, 2009, 416 p.

3. Chernyaev V.M. O lesakh Ukrainy [On forests of Ukraine]. Moscow, 1858, 54 p.

4. Veresin M.M. O fenologicheskikh formakh duba chereschatogo i ispol'zovaniy ikh v lesorazvedenii [About phenological forms of English oak and use them in afforestation]. Izv. vuzov. Lesn. zhurn., 1958., no 3, pp. 3-15.

5. Milenin A.I. Ekologicheskie osobennosti fenologicheskikh raznovidnostei duba chereschatogo (*Quercus robur* L.) v usloviyakh TsChR : avtoref. dis. ...

kand. s.-kh. nauk [Ecological features of phenological varieties of English oak (*Quercus robur* L.) in the conditions of the CCA]. Voronezh, 1997, 24 p.

6. Molchanov A.G. Intensivnost' fotosinteza fenologicheskikh form duba chereschatogo v usloviyakh nedostatochnogo uvlazhneniya [The intensity of photosynthesis of phenological forms of English oak in low moisture]. Lesovedenie, 2012, no 4, pp. 31-38.

7. Rubtsov V.V., Zhirenko N.G., Utkina I.A. Intensivnost' toka pasoki u raznykh fenologicheskikh form duba v yuzhnoi lesostepi [The intensity of the current of sap in different phenological forms of oak in the southern forest-steppe]. Lesovedenie, 2007, no 5, pp. 44-55.

8. Sil'chenko I.I. Fenologicheskie formy duba chereschatogo (*Quercus robur* L.) v razlichnykh tipakh landshaftov Bryanskoi oblasti [Phenological forms of English oak (*Quercus robur* L.) in different types of Bryansk region landscapes]. Vestn. Bryanskogo gos. un-ta, 2012, no 4, pp. 158-161.

9. Bobinac M., Batos B., Miljkovi D., Radulovi S. Polycyclism and phenological variability in the common oak (*Quercus robur* L.). Archives of Biological Sciences, 2012, vol. 64, no 1, pp. 97-105.

10. Trudic B., Galovic V., Orlovic S., Pap P., Pecek S. A strategy for the identification of a candidate gene for drought induced stress in pendunculate oak (*Quercus robur* L. (*Q. pedunculata* Ehrh.)), Fagaceae. Bulgarian J. of Agricultural Science, 2012, vol. 19, no 2, pp. 338-346.

11. Kozlovskii B.L., Fedorinova O.I., Kuropyatnikov M.V. Novyi perspektivnyi dlya zelenogo stroitel'stva i lesorazvedeniya v Rostovskoi oblasti obrazets *Quercus robur* L. [New perspective for green building and afforestation in the Rostov region a sample of *Quercus robur* L.]. Politem. setevoi elektr. nauch. zhurn. Kub. gos. agrar. un-ta (Nauchnyi zhurnal KubGAU), 2015, vol. 2, no 106, pp. 580-91.

12. Yap I.V., Nelson R.J. WinBoot: A program for performing bootstrap analysis of binary data to determine the confidence limits of UPGMA-based dendrograms. Manila, Philippines, 1996, 22 p.

13. Shchepot'ev F.L. Dendrologiya [Dendrology]. Moscow; Leningrad, 1949, 347 p.

14. Chokheli V.A., Kozlovskii B.L., Sereda M.M., Varduni T.V. [Analysis of genetic variation patterns of *Quercus robur* L. artificial population Botanical Garden SFU]. Bioraznoobrazie. Biokonservatsiya. Biomonitoring [Biodiversity. Biopreservation. Biomonitoring]. Sat. II International materials. scient.-pract. conf. Maikop, 2015, pp. 130-133.

15. Lopez-Aljorna A., Bueno M.A., Aguinalde I., Martrin J.P. Fingerprinting and genetic variability in cork oak (*Quercus suber* L.) elite trees using ISSR and SSR markers. Ann. For. Sci., 2007, no 64, pp. 773-779.

## НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК 551.736.3:553.07 (282.256.861)

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-78-85

О РОЛИ ВУЛКАНОГЕННОГО МАТЕРИАЛА В ОБРАЗОВАНИИ  
АТКАНСКОЙ СВИТЫ АЯН-ЮРЯХСКОГО АНТИКЛИНОРИЯ  
ЯНО-КОЛЫМСКОЙ СКЛАДЧАТОЙ ОБЛАСТИ

© 2016 г. А.А. Астахова, А.Э. Харди́ков, И.А. Холодная

Астахова Анна Александровна – соискатель, кафедра минералогии и петрографии, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090.

Astakhova Anna Aleksandrovna – Competitor, Mineralogy and Petrography Department, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia.

Харди́ков Александр Эдуардович – доктор геолого-минералогических наук, профессор, кафедра минералогии и петрографии, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: khardikov@sfnu.ru

Khardikov Aleksandr Eduardovich – Doctor of Geologic and Mineralogical Science, Professor, Mineralogy and Petrography Department, Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: khardikov@sfnu.ru

Холодная Ирина Алексеевна – кандидат геолого-минералогических наук, ведущий геолог, акционерное общество «Магадангеология» Госкорпорации «Росгеология», ул. Дзержинского, 6, г. Магадан, 685000.

Kholodnaya Irina Alekseevna – Candidate of Geologic and Mineralogical Science, Senior Geologist, AO «Magadangeologia» of the State Corporation «Rosgeologia», Dzerzhinskii St., 6, Magadan, 685000, Russia.

Рассматривается происхождение вулканогенного компонента в атканской свите верхнепермских отложений Аян-Юряхского антиклинория. Атканская свита сформирована в результате лавинной седиментации на внешнем шельфе эпиконтинентального морского бассейна материала, выносимого долинно-веерными системами, и продуктов синхронного вулканизма кислого и среднего состава. Периодически возникающие при этом вулканические острова группируются в линейную цепь, совпадающую с осью Аян-Юряхского антиклинория, и тяготеют к зоне глубинного разлома.

**Ключевые слова:** Аян-Юряхский антиклинорий, атканская свита, золотоносность, вулканогенно-осадочные породы, подводный вулканизм.

*Origin of volcanics in Atkan suit of permian volcano-clastic deposits of the Ayan-Yurakh Anticlinorium are observed in the paper. Atkan suit was formed, at the same time, by volcanics and deltaic material during the volcanism. Volcanic island, grewed by volcanic explosion intermediate-alkali composition, groups in chain coincide with Ayan-Yurakh Anticlinorium axes and tend to the deep fault.*

**Keywords:** Ayan-Yurakh Anticlinorium, Atkan suit, ore gold, volcano-clastic rocks, underwater volcanism.

Пермские отложения Аян-Юряхского антиклинория являются составной частью позднепалеозойско-раннемезозойского верхоянского терригенного комплекса Яно-Колымской складчатой области – крупнейшей минерагенической провинции, в металлогении которой ведущая роль принадлежит золоту, серебру, олову. Проводимые здесь геолого-разведочные работы выявили гигантский потенциал крупнотоннажных месторождений, которые относятся к золото-кварцевой формации и в подавляющем большинстве случаев выражены структурно-морфологическим типом линейных штокверков в терригенных и вулканогенно-осадочных породах (наталкинский тип). Месторождения этого типа представляют собой систему разрозненных относи-

тельно богатых жил, объединенных с зонами убогого прожилкования в единую рудную залежь. Особое место занимает атканская свита мощностью 350–1200 м, соответствующая нижней части гижинского горизонта верхней перми и являющаяся стратиграфическим репером. Она сложена вулканогенно-осадочными породами, залегает в ядрах Колымской и Тенькинской антиклиналей Аян-Юряхского антиклинория и выходит на поверхность в бассейнах рек Колыма, Аян-Юрях, Кулу, Тенька, Детрин. Многие золоторудные месторождения и проявления (Наталка, Павлик, Омчак, Боец, Водолей, Ковбой, Метис и другие) локализируются в атканской свите. Они размещены на определенных литолого-стратиграфических уровнях и связаны с

вулканогенно-осадочными породами. Например, установлено, что около 75 % запасов золота Наталкинского месторождения локализовано в пачках пород, содержащих до 40 % пирокластического и терригенного материала псефитовой и псаммитовой размерности [1]. Это говорит о генетической связи месторождений золота с вулканогенно-осадочными комплексами, что вызывает необходимость уточнить роль вулканогенного компонента в составе атканской свиты.

Существует три гипотезы происхождения отложений атканской свиты: 1) это частично перемытые

продукты синхронного подводного вулканизма; 2) ледниково-морские отложения; 3) подводно-оползневые образования, содержащие вулканогенный материал [2–6].

Внешне породы атканской свиты выглядят как темно-серые плотные гравелиты, песчаники или алевролиты, содержащие светло- и зеленовато-серые различные по форме обломки эффузивных пород размером от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров, а иногда даже первых десятков сантиметров, а также белые или бурые зерна полевых шпатов (рис. 1а, б).

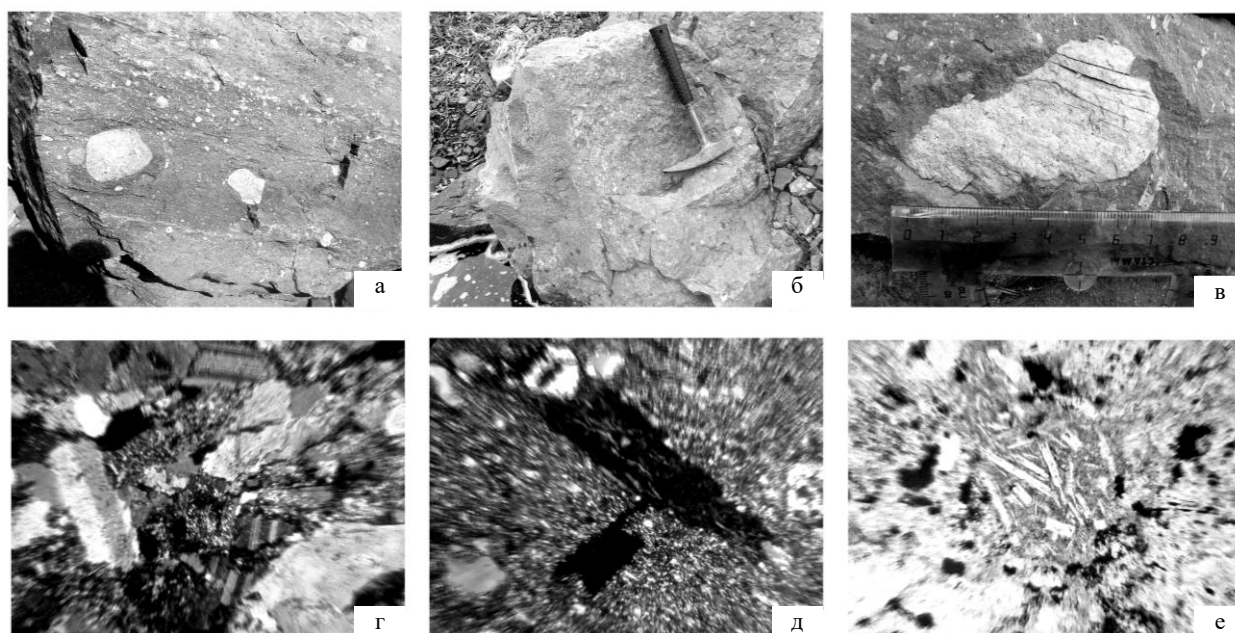


Рис. 1. Текстурно-структурные особенности вулканогенно-осадочных пород атканской свиты: а – лапилли и вулканические бомбы в туффите андезидацита; б – контакт вулканической дайки андезита и пеплово-лапиллиевого туфа андезита; в – обломок андезидацита; г – кристаллокласты плагиоклаза и литокласты андезидацита (ув. 120, н. +); д – хлоритизированные остроугольные обломки вулканического стекла (ув. 100, н. +); е – тонкопризматические кристаллы гейландита, образованные по вулканическому стеклу (ув. 200, н. ||)

Принимая во внимание пестрый облик пород, было предложено называть их диамиктитами, пятнистыми сланцами или рябчиками [7, 8]. Использование названий с неопределенным содержанием для пород, содержащих вулканогенный материал, стирает как минералого-петрографические, так и генетические их особенности. Целесообразнее пользоваться общепринятой классификацией вулканогенных и вулканогенно-осадочных пород [9].

В пределах Аян-Юряхского антиклинория нами было описано 34 разреза отложений атканской свиты [10, 11], а также использованы описания предшественников [8, 12]. Породы изучались с помощью оптической микроскопии, а также рентгенофазового и термохимического анализа [13], что позволило уточнить их состав и выделить следующие

петротипы: туфы и туффиты андезитов, андезидацитов и дацитов, туфопесчаники, туфоалевролиты, туфоаргиллиты, а также аргиллиты и лидиты. В характерном полном разрезе атканской свиты, описанном авторами по руч. Хугланнах (левый приток р. Кулу), снизу вверх залегают:

1. Гравелиты пестрые, неслоистые, пористые, мелко-среднезернистые, литоидные, с песчано-алевритовым цементом порового типа – 25 м.

2. Туфопесчаники темно-серые, тонкогоризонтально- и линзовидно-слоистые, крепкие, среднезернистые, содержащие 10 % объема породы крупнопеплового материала, 10 % мелких лапилли (2–4 мм в поперечнике), а также единичные крупные лапилли и вулканические бомбы (округлые обломки диаметром 5–15 см), с прослоями (0,4–0,5 м) пес-

чаников серых, неслоистых, крепких, мелкозернистых, полимиктовых – 15 м.

3. Аргиллиты темно-серые до черных, тонкоплитчатые, тонкослоистые, средней крепости, с прослоями (0,2–0,6 м) туфоалевролитов темно-серых до черных, тонкогоризонтальнослоистых, крепких – 40 м.

4. Туфы андезидацита пестрые, псевдослоистые вследствие ориентировки плоских обломков длинной стороной параллельно поверхности напластования, очень крепкие, пористые, мелколапиллиевые, кристаллолитокластические, с мелкопепловым цементом типа заполнения порового пространства; с линзовидными прослоями (до 10 см в раздувах) туфогравелитов пестрых, неслоистых, очень крепких, средне-крупнозернистых, литоидных с песчано-алевритовым цементом порового типа – 7–8 м.

5. Туфоалевролиты темно-серые, неясно-слоистые, крепкие, песчаные, с линзовидными прослоями (от 1–2 до 10–15 см) туфопесчаников серых, тонкогоризонтальнослоистых, очень крепких, мелкозернистых – 40 м.

6. Туффиты андезидацита темно-серые, волнисто-, косо- и линзовидно-слоистые, мелколапиллиево-пепловые, литокристаллокластические, песчанисто-алевритовые, содержащие единичные крупные лапилли и агломераты (обломки размером 7–8 мм в поперечнике), равномерно распределенные в породе, удлинением ориентированные параллельно поверхности напластования, – 30 м.

7. Туфоалевролиты темно-серые, тонкогоризонтальнослоистые, песчанисто-гравелитистые, содержащие 15–20 % объема породы крупнопеплового материала и мелких лапилли (обломки размером 3–10 мм в поперечнике); вверх по разрезу содержание пирокластического материала возрастает до 25 %. В туфоалевролитах через 10–15 м – линзовидные прослои (5–7 см) туффитов андезидацита серых, очень крепких, неслоистых, мелколапиллиево-крупнопепловых, литокристаллокластических, гравелитисто-песчаных, в отдельных прослоях переходящих в туфы андезидацита лапиллиево-крупнопепловые литокристаллокластические с мелкопепловым цементом типа заполнения пор – 60 м.

8. Туфоалевролиты, аналогичные описанным в слое № 7, с линзовидными прослоями (5–7 см) песчаников светло-серых, горизонтально- и волнисто-слоистых, очень крепких, мелкозернистых, полимиктовых – 30 м.

9. Пачка среднего (0,2–0,5 м) линзовидного переслаивания с текстурами подводного оползания: а) туфоалевролитов (60 % пачки) темно-серых крепких, плотных, комковатых, песчанисто-граве-

литистых; б) туфопесчаников (25 % пачки) зеленовато-серых, очень крепких, плотных, мелкозернистых; в) туффитов андезидацита (15 % пачки) серых, неясно-слоистых, очень крепких, пеплово-мелколапиллиевых, кристаллолитокластических, песчанисто-гравелитовых, в отдельных прослоях переходящих в туфы андезидацита пеплово-лапиллиевые, кристаллолитокластические с мелкопепловым цементом типа заполнения пор – 80–85 м.

10. Пачка равномерного, тонкого и мелкого (0,2–4 см) линзовидного волнисто-косослоистого переслаивания: а) алевролитов темно-серых, крепких, плотных; б) песчаников серых, мелкозернистых, полимиктовых; в) туфов андезидацита серых, неслоистых, очень крепких, пористых, пеплово-лапиллиевых, кристаллолитокластических – 190 м.

11. Песчаники серые, неясно-слоистые, крепкие, мелкозернистые, алевритистые, слюдяные – 75 м.

12. Туффиты андезидацита пестрые, неслоистые, очень крепкие, лапиллиево-пепловые, литокристаллокластические, песчаные – 45 м.

13. Песчаники серые, неясно-слоистые, крепкие, мелкозернистые, алевритистые, слюдяные – 115 м.

14. Туфопесчаники темно-серые, неслоистые, мелкозернистые, алевритистые, содержащие 10 % объема породы крупнопеплового материала (зерна полевого шпата) и 5 % мелких лапилли (обломки андезидацита размером 2–10 мм в поперечнике), – 75 м.

15. Пачка переслаивания: а) туфопесчаников (прослой 0,1–0,2 м) темно-серых, неслоистых, очень крепких, алевритистых, содержащих 5 % объема породы мелких лапилли и 5 % крупнопеплового материала; б) алевролитов (прослой 0,4–0,7 м) темно-серых, неясно-слоистых, крепких, песчаных, содержащих 1–2 % объема породы крупнопеплового материала, – 150 м.

16. Туфопесчаники темно-серые, неслоистые, мелкозернистые, алевритистые, содержащие 10 % объема породы средне-крупнопеплового материала и 5 % мелких лапилли, – 85 м.

17. Пачка переслаивания: а) туфопесчаников (прослой 0,1–0,2 м) темно-серых, неслоистых, очень крепких, алевритистых, содержащих 5 % объема породы мелких лапилли и 5 % крупнопеплового материала; б) алевролитов (прослой 0,4–0,7 м) темно-серых, неясно-слоистых, крепких, песчаных, содержащих 1–2 % объема породы крупнопеплового материала, – 80 м.

Общая мощность – 1025 м.

Максимальная мощность отложений атканской свиты (до 1200 м) наблюдается на междуречье Кулу – Аян-Юрях, в бассейнах руч. Хугланнах, Улахан-Матрайбыт, Лошкаллах, Тырсеях. Здесь в толще присутствуют линзовидные прослои агломе-

рато-крупнолапиллиевых туфов и линзовидные прослои лидитов. В северо-западном, южном и юго-восточном направлениях эти породы исчезают из разреза, постепенно и неуклонно сокращается мощность свиты, уменьшаются количество и мощность прослоев мелколапиллиевых туфов в туфопесчаниках и туфоалевролитах, а также количество и размер рассеянных в толще вулканических бомб и агломератов. Туфопесчаники постепенно переходят в туфоалевролиты.

В междуречье Хугланнах – Улахан-Матрайбыт авторами описаны залегающие в толще туфопесчаников и туфоалевролитов атканской свиты тела типа вулканических конусов диаметром 30–50 м, в центральных частях которых прослежены вулканические дайки андезита и андезидацита (рис. 1в). Эти тела имеют концентрически-зональное строение, определяемое постепенным уменьшением количества пирокластического материала от центра к периферии, что отражается в смене одних пород другими в последовательности: туфы → туффиты → туфопесчаники или туфоалевролиты. Во всех петрографических типах присутствуют вулканические бомбы и крупные лапилли угловатой формы. В пределах конусов наблюдаются линзовидные прослои (5–20 см), представляющие собой тонкое (1–5 мм) горизонтальное переслаивание туфопесчаника и крупнолапиллиевых туфа (туффита) андезидацита с нерезкими поверхностями напластования слойков и частым их зубчатым выклиниванием. Встречаются также пирокластические породы, которые содержат до 15–20 % своего объема, остроугольных обломков туфоалевролитов и туфопесчаников атканской свиты галечной и гравийной размерности. Следует отметить, что аналогичные особенности состава и строения пород атканской свиты зафиксированы на всей исследуемой территории.

Туфы андезита и андезидацита содержат 85–90 % пирокластического материала, который представлен пеплом (45–60 % объема породы), лапилли (10–35 %), вулканическими бомбами (2–3 %) и редкими вулканическими агломератами. По составу это кристаллокласты полевых шпатов, обломки андезита и андезидацита, а также вулканическое стекло (рис. 1г, д).

В туффитах андезита и андезидацита присутствует 65–70 % пирокластики того же размера и состава.

Кристаллокласты полевых шпатов в туфах (средние и кислые плагиоклазы, микролин и микролин-пертит) имеют средне- и крупнопепловую размерность, характеризуются удлиненно-призматической или таблитчатой формой и полным отсутствием следов окатывания. Как правило, они вторично не изменены. В туффитах преобладают кор-

родированные и замещенные серицитом и сосюритом зерна плагиоклазов. Некоторые из них частично или полностью замещены микрозернистым альбитом лапчатой формы, а также анальцимом, образующим микроагрегаты внутри кристаллов плагиоклазов, придавая им ситовидный облик. Местами по краям зерен развит лейкоксенизированный сфен, а в центральных частях – крупнокристаллический кальцит. Наблюдается зональное распределение эпигенетических минералов: в центре – кальцит, по периферии – анальцим, по краям – оторочка из альбита. Встречаются частично или полностью растворенные обломки плагиоклазов, темные участки которых заняты постепенно переходящим в цемент агрегатом серицита и халцедона.

Обломки андезита и андезидацита составляют 15–35 % объема породы в туфах и 10–25 % в туффитах, имеют размерность лапилли и крупного пепла, угловатую, удлиненно-овальную или округлую форму. Вокруг них отмечается скопление углефицированного органического вещества, лимонита и тонкодисперсного пирита. В крупных частях хорошо просматривается порфиновая структура с микролитовым или фельзитовым матриксом, местами полностью раскристаллизованным и сложенным микроагрегатами халцедона, серицита и гейландита. Лейсты плагиоклазов частично или полностью замещены серицитом. В центре них наблюдаются кристаллы анальцима, кальцита и агрегаты сосюрита, а по краям – сфен и лейкоксен. Фенокристаллы феррических минералов представляют собой лишь фрагменты, или «тени», исходных зерен и определяются только по скоплению вторичных минералов, особенно непрозрачных микроагрегатов титаномагнетита, ориентированных перпендикулярно общей слоистости. Крупные обломки эффузивных пород подверглись гравитационной коррозии с образованием в темных участках халцедона, альбита и серицита.

Обломки вулканического стекла отмечаются в туфах и туффитах в количестве 15–20 и 5–10 % соответственно. Большинство из них имеет пепловую размерность и неясные очертания. Часто это реликты, состоящие из агрегата мелких тонкопризматических кристаллов гейландита. Отдельные витрокласты замещены хлоритом, халцедоном и серицитом, крустифицированы альбитом.

В туффитах присутствует 10–20 % терригенного материала, представленного угловатыми частицами кварца алевритовой или мелкопсаммитовой размерности. Редко встречающиеся более крупные обломки имеют окатанную форму и несут следы растворения под давлением и переотложения в виде кремнисто-серицитовой массы в темных участках.

Цементирующая масса в туфах типа заполнения порового пространства занимает 10–15 % объема породы. Она сложена микрокристаллическим гейландитово-халцедоновым агрегатом, образующим скопления неправильной формы и являющимся продуктом гидрохимического разложения вулканического стекла (рис. 1е). По цементу развиваются соссюрит и кальцит. В туффитах цемент является контурно-поровым и порово-базальным (15–40 % объема породы), гейландитово-халцедоново-гидрослюдистым. Глинистое вещество частично преобразовано в серицит, который часто облекает обломки плагиоклазов или образует шиповидные вроски в теневых участках обломочных зерен. Иногда в цементе присутствуют изометричные кристаллы анальцима, окруженные микроагрегатами сфена и лейкоксена. Встречается железистый цемент, неравномерно распределяющийся в межзерновом пространстве и образующий «рубахи» на обломках. Кроме того, в цементе туффитов присутствует тонкодисперсное углефицированное органическое вещество, часто концентрирующееся вокруг обломков эффузивных пород.

*Туфопесчаники и туфоалевролиты* содержат 25–45 %, а *туфоаргиллиты* – 10–20 % пирокластического материала, который, как правило, крупнее терригенного, имеет пепловую и более крупную размерность. Это кристаллокласты полевых шпатов, обломки эффузивных пород и вулканического стекла.

Полевые шпаты (кислые и средние плагиоклазы) встречаются в виде призматических кристаллов. Средние плагиоклазы частично или полностью замещены альбитом, кальцитом, соссюритом, лейкоксенизированным сфеном, анальцимом, однако встречаются и относительно свежие крупные обломки. Кислые плагиоклазы – менее выветрелые. Отмечаются единичные овальные или изометричные зерна микроклин-пертита.

Обломки андезита и андезидацита (2–30 мм) имеют таблитчатую, удлинено-овальную форму, иногда с извилистыми очертаниями. Вокруг них часто наблюдается кайма, состоящая из смеси сфена, лейкоксена, железистых минералов и тонкорассеянного углефицированного органического вещества. В крупных обломках хорошо заметна порфировая структура. Фенокристаллы представляют собой реликты плагиоклазов, замещенные лейкоксенизированным сфеном, цеолитами, альбитом. Основная масса имеет фельзитовое, реже микролитовое, строение и часто замещена агрегатами халцедона и серицита. Все литокласты корродированы веществом цемента, в некоторых хорошо видны шиповидные вроски серицита.

Обломки вулканического стекла преимущественно пепловой размерности и серповидной, угловато-удлиненной, треугольной и неправильной форм частично или полностью замещены халцедоном, серицитом и альбитом. Местами наблюдается вкрапленность титаномагнетита.

Терригенный кварц, составляющий 15–35 % объема туфопесчаников, туфоалевролитов и туфоаргиллитов, представлен зернами алевритовой и очень редко мелкосаммитовой размерности, имеющими угловатую или неправильную форму с извилистыми вследствие коррозии очертаниями. Кварц прозрачный, без трещин и включений, иногда с облачным погасанием.

Цемент в туфоалевролитах порово-базальный и базально-поровый (более 30 % объема породы), как правило, серицитово-халцедоново-гидрослюдистый. Серицит, развивающийся по гидрослюде, в наибольшем количестве скапливается в виде каемок вокруг обломочных зерен и внедряется в них по трещинам. Иногда в цементе присутствует микро- и мелкозернистый кальцит, неравномерно заполняющий межзерновое и поровое пространство. По характеру распределения в породе цемент почти всегда сплошной, равномерный. В нем постоянно наблюдается рассеянное органическое вещество, образующее местами скопления.

Глинистый материал цемента туфопесчаников и туфоалевролитов является седиментационным. С погружением породы на глубину он преобразуется в серицит. Освободившийся в результате этого кремнезем заполняет межзерновое пространство, а вода способствует растворению твердых минеральных частиц при сильной внешней нагрузке. Кроме того, свободный кремнезем образуется в результате гравитационной коррозии полевых шпатов, вулканического стекла, литокластов и кварца. Он откладывается, прежде всего, в теневых участках зерен, ориентированных перпендикулярно к направлению максимальных напряжений. Часто по краям пор наблюдаются крустификационные каемки микрокристаллического кварца или альбита. Часть пор заполнена кристаллически-зернистым кальцитом – продуктом разложения средних плагиоклазов.

В составе атканской свиты выявлены также осадочные породы, не содержащие видимой пирокластики. Это аргиллиты и лидиты. Вероятнее всего, пирокластический материал в них был уничтожен в результате катагенетических преобразований.

*Аргиллиты* на 85–90 % состоят из серицитово-халцедоново-гидрослюдистого матрикса грубопелитового строения, содержащего углефицированное органическое вещество в рассеянной форме и в виде небольших скоплений, а также кристаллы кальцита (0,02–0,04 мм) и агрегаты лейкоксена. 8–10 % объема породы составляют зерна кварца алевритовой раз-



мерности. Присутствуют (5–7 % объема породы) открытые поры размером 0,02–0,1 мм.

*Лидиты* на 75–80 % состоят из халцедона и содержат 10–15 % углефицированного органического вещества, которое равномерно распределено в породе или образует удлиненные, ориентированные параллельно друг другу скопления размером 0,015–0,04 мм. 5–10 % породы составляют игольчатые агрегаты (0,02–0,04 мм) серицита и едва различимые (до 0,015 мм) листочки гидробиотита. Встречаются округлые остатки панцирей радиолярий, сложенных халцедоном.

Важно отметить, что в кремнисто-глинистом матриксе пород атканской свиты содержится 15–20 % цеолитов группы гейландита, а также небольшое количество монтмориллонита. Эта ассоциация является типичной для вулканогенно-осадочных комплексов. Она возникает в результате диагенетического преобразования вулканического стекла, находящегося в морских осадках.

Во время формирования атканской свиты на исследуемой территории существовали обстановки внешнего шельфа и континентального склона эпиконтинентального морского бассейна, где происходило лавинное накопление осадков конусов выноса дельт [10, 11], сопровождавшееся окраинно-континентальным вулканизмом островного типа. Поступавший в морской бассейн пирокластический и лавовый материал способствовал формированию мощной эффузивно-обломочной толщи.

Вулканогенно-осадочная природа атканской свиты ставит вопрос об источнике столь огромного количества туфогенного материала. Немногочисленные центры его возможных извержений, известные в пределах Охотского массива [14, 15], как и гипотетическая вулканическая дуга, предполагаемая в пределах современного Охотского моря [2, 16], не обеспечивают решение этой проблемы, поскольку какой-либо зональности в распределении вулканитов относительно указанных объектов не отмечается. Многочисленные вулканические бомбы и лапилли, слагающие атканскую свиту, ее фациальная неоднородность при сравнительно однообразном составе туфов и туффитов предполагают наличие местных источников поступления вулканогенного материала.

Арга-Юряхский магматический дайковый комплекс прорывает отложения атканской свиты в бассейнах р. Арга-Юрях, Межевой, Хугланнах, Улахан-Матрайбыт (левобережье нижнего течения р. Кулу). Дайки мощностью 10–30 м простираются на северо-запад и имеют протяженность 100–800 м, контактовых ареолов не имеют. Их можно разделить на интрузивные тела, сложенные диоритами, кварцевыми диоритами и гранодиоритами, и вулканические тела, состоящие из окварцованных ан-

дезитов, андезидацитов и дацитовых порфиров. Магматические тела Арга-Юряхского комплекса по своему составу весьма схожи с литокластикой пород атканской свиты. В пермское время они могли являться центрами подводных вулканических извержений, периодически формировавших вулканические острова, разрушаемые абразией, которые группируются в линейную вулканическую цепь, совпадающую с осью Аян-Юряхского антиклинория, и тяготеют к зоне глубинного разлома [17]. По мере удаления от предполагаемых центров извержения уменьшается количество крупнообломочного пирокластического материала, увеличивается степень окатанности и разложенности лито- и кристаллокластов, исчезают прослойки туфов, уменьшается мощность туффитов.

Даже если считать многочисленные вулканические дайки, прорывающие породы атканской свиты, более поздними по времени образования, все равно обращает на себя внимание тот факт, что во всех случаях с этими дайками пространственно связаны прослойки туффитов и туфов эруптивного аппарата, поставившего пирокластику в пермский бассейн осадконакопления и сохранившего активность в течение последующих геологических эпох.

Определение возраста U-Pb SHRIMP-методом для ограненных кристаллов циркона, не удаленных от источника сноса и выделенных из верхней части атканской свиты, показало средневзвешенный возраст этих кристаллов  $256,3 \pm 3,7$  млн лет, т.е. пермский (рис. 2). Аналогичный результат, показывающий пермский магматический источник цирконов, получен А.С. Бяковым с соавторами: «пермские цирконы из исследованных образцов диамиктитов мы интерпретируем как магматические, принимая во внимание морфологию кристаллов (хорошая огранка) и относительно высокое отношение Th/U, варьирующее для большинства кристаллов циркона от 0,4 до 0,8» [16, с. 22].

Таким образом, проведенное исследование дает основание считать атканскую свиту вулканогенно-осадочной толщиной, возникшей в результате частичного перемива продуктов синхронного вулканизма, происходившего на внешнем шельфе и континентальном склоне морского эпиконтинентального бассейна в условиях лавинного осадконакопления конусов выноса дельт рек. На территории Аян-Юряхского антиклинория в ходе единого этапа геологического развития сформировался вулканогенно-осадочный комплекс отложений, включающий атканскую свиту, центры вулканической активности которого могли быть источником золота, впоследствии накопленного и перераспределенного пермским осадочно-породным бассейном, занимавшим территорию современного Аян-Юряхского антиклинория.



14. Литвинов В.Е., Умитбаев Р.Б. Стратиграфия верхнепалеозойских отложений Охотского массива и южной части Яно-Колымской геосинклинальной системы // Докембрий и палеозой Северо-Востока СССР. Магадан, 1974. С. 142 – 146.

15. Чиков Б.М. Тектоника Охотского срединного массива. М., 1970. 151 с.

16. Бяков А.С., Ведерников И.Л., Акинин В.В. Пермские диамиктиты Северо-Востока Азии и их вероятное происхождение // Вестн. Сев.-Восточн. науч. центра ДВО РАН. 2010. № 1. С. 14 – 24.

17. Сурчилов В.А. О пермском магматизме и тектонической природе Аян-Юряхского антиклинория // Наука Северо-Востока России – начало века. Магадан, 2005. С. 127 – 132.

#### References

1. Grigorov S.A., Vorozhbenko V.D., Kushnarev P.I., Markevich V.Yu., Tokarev V.N., Chichev V.I., Yagubov N.P. Natalkinskoe zolotorudnoe mestorozhdenie – stroenie i osnovnye poiskovyie priznaki [Natalka gold deposit - structure and basic search features]. *Otechestvennaya geologiya*, 2007, no 3, pp. 43-50.

2. Byakov A.S. [About Permian paleogeography and geodynamics of the North-East Asia (sedimentological and biogeographic data)]. *Materialy Vseros. soveshchaniya, posvyashch. 90-letiyu akad. N.A. Shilo* [Proc. meeting, devoted. 90th anniversary of acad. N.A. Shilo]. Vol. 1. Magadan, 2003, pp. 131-134.

3. Ganelin V.G. [Taimyr-Kolyma subdomain]. *Osnovnye cherty stratigrafii permskoi sistemy SSSR* [The main features of the stratigraphy of the Permian system of the USSR]. Work of VSEGEI. New Series. Leningrad, 1984, vol. 286, pp. 111-142.

4. Umitbaev R.B., Vel'dyaksov F.F. [The tectonic and metallogenic zoning of Okhotsk median massif and its surroundings]. *Voprosy geologii sredinnykh massivov Severo-Vostoka SSSR* [Geology median massifs of the North-East of the USSR]. Magadan, 1977, pp. 79-98.

5. Chumakov N.M. Sledy pozdnepermского oledeneniya na reke Kolyme: otzvuk gondvanskikh oledeneniya na Severo-Vostoke Azii [Traces of Late Permian glaciation on the River Kolyma: the echo of Gondwana glaciations in North-East Asia]. *Stratigrafiya. Geol. korrelyatsiya*, 1994, vol. 2, no 5, pp. 130-150.

6. Epshtein O.G. Verkhnepaleozoiskie ledovo-morskie otlozheniya basseina istokov r. Kolymy [The Upper ice-sea deposits origins of River Kolyma Basin]. *Litologiya i poleznye iskopaemye*, 1972, no 3, pp. 112-127.

7. Byakov A.S. Biostratigrafiya permских otlozhenii Severnogo Priokhot'ya (Severo-Vostok Azii) [Biostratigraphy of Permian deposits of North Priokhot'e (Northeast Asia)]. *Stratigrafiya. Geol. korrelyatsiya*, 2007, vol. 15, no 2, pp. 47-71.

8. Byakov A.S., Vedernikov I.L. *Stratigrafiya permских otlozhenii severo-vostochnogo obramleniya Okhotskogo massiva, tsentral'noi i yugo-vostochnoi chastei Ayan-Yuryakhskogo antiklinoriya* [Stratigraphy of Permian north-eastern framing of Okhotsk massif, central and south-eastern parts of the Ayan-Yuryakh Anticlinorium]. Preprint. Magadan, 1990, 69 p.

9. Maleev E.F. *Vulkanity* [Volcanics]. Moscow, 1980, 240 p.

10. Khardikov A.E., Kholodnaya I.A. Litologo-fatsial'nye usloviya zolotonosnosti verkhnepermских otlozhenii Ayan-Yuryakhskogo antiklinoriya Yano-Kolymskoi skladchatoi oblasti [Lithofacies conditions of gold-bearing deposits of the Upper-Ayan Yuryakh Anticlinorium of Yano-Kolyma folded area]. *Stratigrafiya i sedimentologiya neftegazonosnykh basseinov*, 2009, no 1, pp. 87-97.

11. Khardikov A.E., Parada S.G., Kholodnaya I.A. Litologo-fatsial'nye usloviya zolotonosnosti verkhnepermских otlozhenii Ayan-Yuryakhskogo antiklinoriya Yano-Kolymskoi skladchatoi oblasti [Lithofacies conditions of gold-bearing deposits of the Upper-Ayan Yuryakh anticlinorium of Yano-Kolyma folded area]. *Rudy i metally*, 2009, no 3, pp. 22-28.

12. Goncharov V.I., Voroshin S.V., Sidorov V.A. *Natalkinskoe zolotorudnoe mestorozhdenie* [Natalka gold deposit]. Magadan, 2002, 250 p.

13. Belitskii I.A., Drobot I.V., Valueva G.P., Batiashvili T.V., Vasilenko V.B. *Opyt ekspressnogo opredeleniya tseolitov v gornyykh porodakh s ispol'zovaniem portativnykh tseolitnykh laboratorii PTsL-1 i PTsL-2* [Experience the rapid determination of zeolites in rocks with the use of portable laboratories zeolite CPL-1 and CPL-2]. Method. guide. Novosibirsk, 1979, 80 p.

14. Litvinov V.E., Umitbaev R.B. [Stratigraphy of Paleozoic sediments of the Okhotsk massif and the southern part of the Yana-Kolyma geosynclinal system]. *Dokembrii i paleozoi Severo-Vostoka SSSR* [Precambrian and Paleozoic North-East of the USSR]. Magadan, 1974, pp. 142-146.

15. Chikov B.M. *Tektonika Okhotskogo sredinnogo massiva* [Tectonics of the Okhotsk median massif]. Moscow, 1970, 151 p.

16. Byakov A.S., Vedernikov I.L., Akinin V.V. Permские diamiktity Severo-Vostoka Azii i ikh veroyatnoe proiskhozhdenie [Perm diamiktity of North-east Asia and their probable origin]. *Vestn. Sev.-Vostochn. nauch. tsentra DVO RAN*, 2010, no 1, pp. 14-24.

17. Surchilov V.A. [About Permian magmatism and tectonic nature of Ayan-Yuryakh anticlinorium]. *Nauka Severo-Vostoka Rossii – nachalo veka* [Science North-East of Russia - the beginning of the century]. Magadan, 2005, pp. 127-132.

УДК 528.8, 520.88

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-86-90

## ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЛУЧЕВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КРУТОПАДАЮЩИХ НА ИОНОСФЕРУ ТРАЕКТОРИЙ\*

© 2016 г. Г.А. Жбанков

Жбанков Геннадий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт физики Южного федерального университета, пр. Стачки, 194, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: zhbankov@ip.sfedu.ru

Zhbankov Gennadii Anatolievich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, Research Institute of Physics of the Southern Federal University, Stachki St., 194, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: zhbankov@ip.sfedu.ru

Метод геометрической оптики является лучшим приближением волнового уравнения в случае ионосферы. Амплитудно-траекторные расчеты в его рамках наиболее последовательно и эффективно реализуются на пути решения расширенной системы характеристических уравнений (метод характеристик). Однако этот метод сталкивается с трудностями при расчете крутопадающих на анизотропную среду лучей. Предлагается решение данной проблемы путем переброски компонент волнового вектора в окрестности точки отражения.

**Ключевые слова:** амплитудно-траекторные расчеты, метод характеристик, анизотропная среда, волновой вектор, система дифференциальных уравнений, модель ионосферы, конструкция Поверлейна.

The method of geometrical optics is the best approximation of the wave equation in the case of the ionosphere. Amplitude-trajectory calculations within it more consistently and effectively implemented in the way of solving the extended system of characteristic equations (method of characteristics). However, this method has difficulty in calculating an anisotropic medium steep rays. In this paper, we propose a solution to this problem through transfer component of the wave vector in the vicinity of the point of reflection.

**Keywords:** amplitude-trajectory calculations, method of characteristics, anisotropic medium, wave vector, system of differential equations, model of the ionosphere, Poverley design.

Расчеты распространения радиоволн в ионосфере аналитическими методами возможны только для небольшого числа случаев, когда ионосферу можно заменить крайне упрощенными моделями и пренебречь ее неоднородной структурой и влиянием магнитного поля. Однако решаемые в настоящее время научные и практические задачи требуют максимального приближения модели к реальным условиям.

Наилучшим приближением волнового уравнения в случае ионосферы, по-видимому, можно считать метод геометрической оптики. Он занимает среди других приближенных методов решения волновых уравнений особое место. С одной стороны, это обусловлено тем, что он позволяет в ряде случаев получить аналитическое решение, когда при аналогичных условиях могут быть решены и исходные уравнения Максвелла. Это дает возможность осуществить более детальную проверку метода. С другой стороны, данный подход приводит к решению уравнения эйконала, которое относится к классу уравнений Гамильтона – Якоби [1–3]. Тогда в теории распространения радиоволн в ионосферной плазме могут быть применены методы, развитые в классической механике [2, 3].

Было разработано несколько методов для амплитудно-траекторных расчетов в возмущенной

среде в этом приближении: Смита [4], рефракционного интеграла [5], характеристик [3, 6], поперечных смещений [7] и др.

Наиболее последовательно и эффективно в рамках геометрооптического приближения задача нахождения траекторных и энергетических характеристик реализуется на пути решения расширенной системы характеристических уравнений (метод характеристик).

Данный метод хорошо зарекомендовал себя при расчетах в изотропной среде и в большинстве случаев при использовании анизотропной модели среды. Однако он сталкивается с трудностями при расчете траекторий лучей, крутопадающих на ионосферу, описываемую анизотропной моделью. В настоящей работе предлагается решение этой проблемы путем переброски волнового вектора.

### Основные уравнения метода характеристик

Приведем основные уравнения метода характеристик, которые требуются для дальнейшего изложения.

Используя уравнение эйконала в виде

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t, \omega) = \frac{1}{2} [k^2 - k_0^2 n^2(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t, \omega)] = 0, \quad (1)$$

получим систему дифференциальных уравнений

\* Работа выполнена при поддержке внутреннего гранта ЮФУ № 213.01-2014/013ВГ.

для нахождения траекторий в магнитоактивной неоднородной среде в виде [6]

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{p} - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p} - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \cos \beta} \cdot \mathbf{h}' \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{r}} \end{cases}, \quad (2)$$

где  $\tau$  – независимая вспомогательная переменная;  $\mathbf{r} = \{x, y, z\} = \{x_i\}$  – радиус-вектор в декартовой системе координат;  $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}_0|} = \{p_i\}$  – нормированный волновой вектор;  $|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c$ ;

$$\mathbf{h}' = \frac{\partial \cos \beta}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \left( \mathbf{h} - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cos \beta \right), \quad \mathbf{h} = (0, \sin \alpha, \cos \alpha),$$

$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ;  $\alpha$  – угол между

вертикалью и магнитным полем,  $\beta = (\mathbf{k}'\mathbf{h})$ .

Амплитуду волны можно найти по формуле [3]

$$A = A^0 \left[ \frac{D(\tau^0)}{D(\tau)} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{A^0}{\sqrt{F}}, \quad (3)$$

где  $F = \frac{D(\tau^0)}{D(\tau)}$  – расходимость лучей;  $A^0$  – начальное значение амплитуды при входе в слой;  $D(\tau)$  – якобиан перехода от декартовых координат  $\mathbf{r} = \{x_i\}$  к лучевым  $\gamma = \{\theta, \varphi, \tau\}$ ;  $\theta, \varphi$  – соответственно полярный и азимутальный углы;  $D(\tau^0) = D(\tau)|_{\tau=\tau^0}$  – его начальное значение:

$$D(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \varphi, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix}.$$

Производные  $\frac{\partial x_i}{\partial \gamma_k}$  находятся путем интегрирования присоединенной к (2) системы уравнений для  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma_k}$ , которая получается при ее дифференцировании по параметрам  $\gamma_k$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma_k} \right) = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma_k} \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma_k} \right) = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma_k} \right) \end{cases}. \quad (4)$$

Таким образом, мы получили обобщенную систему характеристических уравнений геометриче-

ской оптики, состоящую из векторных уравнений (2), (4), которая и лежит в основе амплитудно-траекторных расчетов. В проекциях на оси декартовой прямоугольной системы координат (ДПСК) она состоит из 18 дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = p_i - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \cos \beta} \cdot h'_i; \quad \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \gamma_k} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k} - \\ &- \frac{1}{2} h'_j \left[ \frac{\partial^2 n^2}{(\partial \cos \beta)^2} \left( h'_j \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_k} \right) + \frac{\partial^2 n^2}{\partial \cos \beta \partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \gamma_k} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \cos \beta} \frac{1}{|\mathbf{p}|^2} \left[ h'_i \left( p_j \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_k} \right) + \cos \beta \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k} + \right. \\ &\left. + p_i \left( h'_j \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_k} \right) - \frac{p_i \cos \beta}{|\mathbf{p}|^2} \left( p_j \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_k} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 n^2}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \gamma_k} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 n^2}{\partial v \partial \cos \beta} \left( h'_j \frac{\partial p_j}{\partial \gamma_k} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \gamma_k}, \end{aligned}$$

где  $v = \omega_0/\omega$ ,  $\omega_0$  – плазменная частота в текущей точке.

### Особенности решения для крутопадающих на ионосферу траекторий

Рассмотрим систему характеристических уравнений (5) для непрерывно дифференцируемой среды распространения. Тогда, если нет внешнего магнитного поля, правые части этих уравнений – аналитические функции. При решении таких систем уравнений характеристики не имеют никаких особенностей. По-иному складывается ситуация в магнитоактивной ионосфере. В этом случае уравнения (5) в магнитоактивной ионосфере имеют особую точку, которая проявляется для обыкновенной волны в виде «острия» на лучевой траектории [8, 9]. Такое свойство отражает поведение поверхностей постоянного показателя преломления, которые для обыкновенной волны при  $v=1$  вырезаются в отрезок, параллельный вектору геомагнитного поля. В общем случае, когда ионосфера и геомагнитное поле горизонтально неоднородны, заранее указать начальные условия, обеспечивающие особенность на лучевой траектории, невозможно. Следовательно, представляет интерес детальное исследование лучевых уравнений в окрестности особенности, когда  $v \rightarrow 1$ .

Анализ приводит к следующему асимптотическому решению лучевых уравнений в окрестности особой точки  $v=1$  [5]:

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \text{const}_1(1-v); \quad \mathbf{k}' - \mathbf{k} = \text{const}_2\sqrt{1-v}.$$

Это решение показывает:

– в окрестности особой точки пространственные координаты луча быстрее стремятся к своему пределу, чем компоненты волнового вектора;

–  $\mathbf{x}'$  непрерывно изменяется при переходе  $v$  через 1;

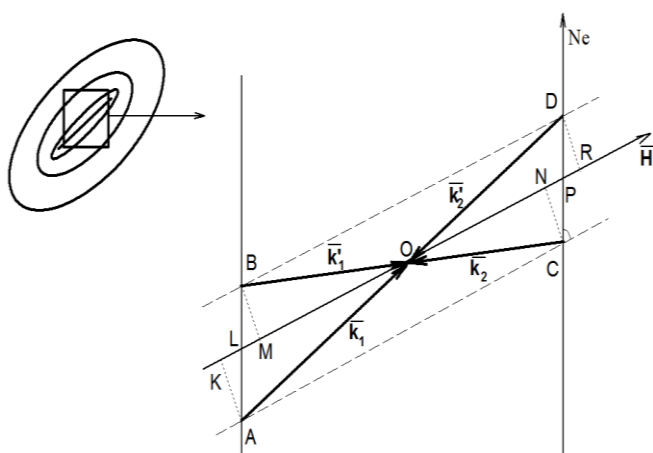
– волновой вектор  $\mathbf{k}'$  стремится к своему пределу  $\mathbf{k} = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$  двумя путями, о чем свидетельствуют различные знаки векторной константы при  $\sqrt{1-v}$ .

Последнее свойство наиболее важно при численном решении волновых уравнений, поскольку оно говорит о невозможности в процессе поиска решения перейти с одной ветви траектории на другую.

Поэтому в окрестности особенности необходимо использовать некоторый метод, основанный на физических принципах распространения радиоволн и позволяющий провести переброску системы (5) через особую точку. В ранее проведенном анализе данной особенности [10] автором высказываются только общие предложения решения и не приводится его конкретная методика, которую можно использовать непосредственно при расчетах.

В данной работе дается подробное описание такого метода.

Дальнейшие наши рассуждения основаны на конструкции Поверлейна (рисунок) для обыкновенной волны, чье общее схематическое изображение приведено в верхнем левом углу иллюстрации. На остальной части рисунка показана сильно увеличенная центральная часть конструкции.



Конструкция Поверлейна для обыкновенной волны

Рассматриваемую плоскость можно назвать условной плоскостью магнитного меридиана. Она содержит вектор магнитного поля  $\mathbf{H}$  и вектор локального градиента электронной плотности. Точка  $O$  является ее центром; наклонная сплошная прямая линия  $KR$ , помеченная значком вектора  $\mathbf{H}$ , соответствует сегменту того отрезка, к которому стягиваются поверхности показателя преломления при  $v \rightarrow 1$  (как известно, его ориентация определяется ориентацией магнитного поля); две штриховые линии ( $AC$  и  $BD$ ) соответствуют сечению плоскостью магнитного меридиана поверхности показателя преломления, близкой к  $v=1$  (форма такой поверхности очень близка к форме прямого цилиндра, ось которого совпадает с  $KR$ ). Две вертикальные прямые  $AB$  и  $CD$  представляют собой два варианта лучевых траекторий (по определению в конструкции Поверлейна траектории изображаются прямыми, параллельными вектору градиента электронной концентрации). Для характеристики локального направления градиента электронной плотности введем единичный вектор  $\mathbf{g} = CN_e/|CN_e|$ .

Пусть точки  $A$  и  $C$  – точки траекторий, где мы решили произвести переброску. Тогда точки  $B$  и  $D$  – те точки, для которых мы должны определить новые значения компонент волнового вектора. Пусть  $\mathbf{k}$  – волновой вектор до переброски, а  $\mathbf{k}'$  – волновой вектор после нее. В конструкции Поверлейна такой волновой вектор всегда соединяет точку траектории с центром  $O$ .

Следующие 4 отрезка равны друг другу, и поскольку соответствующие векторы параллельны вектору  $\mathbf{g}$ , мы вводим общее обозначение для них:

$$AL = LB = CP = PD = m \cdot \mathbf{g}.$$

Поскольку отрезки  $OL$  и  $OP$  коллинеарны с вектором  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$ , мы можем для вектора  $OL$  (или вектора  $OP$ ) ввести обозначение  $l \cdot \mathbf{h}$ .

Существуют следующие векторные соотношения, общие для случаев 1 и 2

$$\begin{cases} \mathbf{k} + l \cdot \mathbf{h} = m \cdot \mathbf{g} \\ 2m \cdot \mathbf{g} + \mathbf{k}' = \mathbf{k} \end{cases} \quad (6)$$

где  $\mathbf{k} = (k_y, k_z)$  – волновой вектор до отражения;  $\mathbf{k}' = (k'_y, k'_z)$  – после отражения;  $\mathbf{h} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$  –

магнитное поле;  $\mathbf{g} = (g_y, g_z) = \left( \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz} \right)$  – градиент электронной концентрации.

Нетрудно видеть, что они также включают случай траектории, проходящей через центр  $O$ : в этом случае  $l=0$  и автоматически получается условие распространения обратно по той же траектории ( $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ ).

Поскольку векторы, входящие в систему (6), двумерные, она сводится к системе 4 скалярных линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно 4 неизвестных величин:  $l$ ,  $m$  и двух компонент вектора  $\mathbf{k}'$ . (Компоненты векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{h}$  известны в точках  $A$  и  $C$ ). Такая система имеет однозначное решение.

Таким образом, мы приходим к идее переброски компонент волнового вектора. Поскольку соотношения (6) – векторные, мы их можем расписывать по компонентам и решать в любой координатной системе, в частности в той, в которой записаны и решаются лучевые уравнения. Если нужно найти новые значения углов (например  $\alpha$ ), их легко можно выразить через компоненты волнового вектора. Преимущество нового подхода заключается в том, что не нужно следить за величинами компонент волнового вектора, достаточно включить универсальное условие переброски при  $v \rightarrow 1$ .

### Применение к траекторным расчетам

Рассмотрим распространение в плоскости магнитного меридиана ( $YOZ$ ).

Для компонент волнового вектора решение находится из системы (6). После преобразований получаем

$$\begin{cases} k'_y = k_y - 2m \cdot g_y \\ k'_z = k_z - 2m \cdot g_z \end{cases}, \quad (7)$$

где  $m = \frac{k_z \sin \alpha - k_y \cos \alpha}{g_z \sin \alpha - g_y \cos \alpha}$ .

Пространственные координаты  $\mathbf{r} = (y, z)$  не изменяются.

В случае расширенной системы изменение волнового вектора  $\mathbf{k}$  приводит к скачку производных от  $n^2(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ . Таким образом, изменяются все 8 величин, входящих в нее:

$\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \gamma}\right), \left(\frac{\partial \mathbf{k}'}{\partial \gamma}\right)$ , где  $\gamma$  – лучевые координаты.

Путем дифференцирования (6) по  $\gamma$  можно получить значения производных от волнового вектора после отражения:

$$\begin{cases} \frac{\partial k'_y}{\partial \gamma} = \frac{\partial k_y}{\partial \gamma} - 2m \frac{\partial g_y}{\partial \gamma} - 2g_y \frac{\partial m}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial k'_z}{\partial \gamma} = \frac{\partial k_z}{\partial \gamma} - 2m \frac{\partial g_z}{\partial \gamma} - 2g_z \frac{\partial m}{\partial \gamma} \end{cases}. \quad (8)$$

Здесь  $\frac{\partial g_y}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{dV}{dy} \right) = \frac{d^2V}{dxdy} \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{d^2V}{dy^2} \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{d^2V}{dydz} \frac{\partial z}{\partial \gamma}$ ,

$\frac{\partial g_z}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{dV}{dz} \right) = \frac{d^2V}{dxdz} \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{d^2V}{dydz} \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{d^2V}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial \gamma}$ ,

$$\frac{\partial m}{\partial \gamma} = \frac{\frac{\partial k_z}{\partial \gamma} \sin \alpha - \frac{\partial k_y}{\partial \gamma} \cos \alpha}{g_z \sin \alpha - g_y \cos \alpha} - m \cdot \frac{\frac{\partial g_z}{\partial \gamma} \sin \alpha - \frac{\partial g_y}{\partial \gamma} \cos \alpha}{g_z \sin \alpha - g_y \cos \alpha}.$$

Дифференцируя по  $\gamma = (\theta, \varphi)$  дисперсионное соотношение  $k^2 = n^2$ , получаем после отражения

$$\mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \gamma}, \text{ или в проекции на оси:}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \gamma} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right). \quad (9)$$

В общем виде его можно записать в виде

$$a_1 \frac{\partial y}{\partial \gamma} + b_1 \frac{\partial z}{\partial \gamma} = c_1. \quad (10)$$

В этом уравнении присутствуют две неизвестные величины  $\frac{\partial y}{\partial \gamma}$  и  $\frac{\partial z}{\partial \gamma}$ . Таким образом, для полного решения необходимо еще одно уравнение, содержащее производные от пространственных координат по лучевым.

Для этого продифференцируем уравнение (9) по координате  $z$  (или  $y$ ):

$$-\frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 n^2}{\partial v \partial \cos \beta} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial^2 n^2}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial n^2}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{r} \partial z} \right).$$

И в проекции на оси:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial^2 n^2}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n^2}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) + \frac{\partial y}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial^2 n^2}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial n^2}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial z}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial^2 n^2}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial n^2}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = -h'_i \frac{\partial k_i}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 n^2}{\partial v \partial \cos \beta} \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}$$

Или

$$a_2 \frac{\partial y}{\partial \gamma} + b_2 \frac{\partial z}{\partial \gamma} = c_2 \quad (11)$$

Из системы двух уравнений (10) и (11)

находятся величины  $\frac{\partial y}{\partial \gamma}$  и  $\frac{\partial z}{\partial \gamma}$   $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \gamma} = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{cases}$ .

В общем случае трехмерно-неоднородной среды необходимо сначала перейти из системы координат, в которой производятся расчеты к локальной магнитной системе, провести переброску, а затем вернуться назад, к рабочей системе координат.

Переход между различными системами координат сводится к поворотам относительно общего начала координат по известным формулам [11].

Для нахождения коэффициентов преобразования систем координат можно использовать нормированные векторы  $\mathbf{gradV} = \frac{dV}{d\mathbf{r}}$  и  $\mathbf{h}$ , определённые в обеих системах.

В вертикальной рабочей системе географических координат  $\frac{d\mathbf{V}}{dr} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$ ,

$\mathbf{h}' = (\cos I \sin D, \cos I \cos D, \sin I)$ , где  $I$  – магнитное наклонение, отсчитываемое от Земли;  $D$  – магнитное склонение (направление на магнитный полюс, угол, заключенный между северным направлением истинного и магнитного меридианов). В северном полушарии  $I < 0$  (направление вниз), в южном –  $I > 0$ .

В локальной магнитной системе координат  $x'y'z'$ :  $\frac{d\mathbf{V}'}{dr} = (0, 0, 1)$ ;  $\mathbf{h}' = (0, \sin \alpha, \cos \alpha)$ , где  $\alpha$  – угол между магнитным полем и вертикалью.

### Заключение

В настоящей работе предложен метод решения проблемы, связанный с применением метода характеристик в случае расчета траекторий лучей, крутопадающих на анизотропную среду. Используя его, мы можем заменить расчеты в окрестности точки отражения переборской компонент волнового вектора. Данная процедура опирается на физические основы распространения радиоволн и не приводит к потере точности решения.

### Литература

1. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М., 1984. 392 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1988. 216 с.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980. 304 с.
4. CCIR. Supplement to report 252-2. Genova, 1982. 38 p.
5. Кияновский М.П., Зырянова Л.А. Метод рефракционного интеграла и его применение к расчету радиотрасс // Техника средств связи. Серия СС. М., 1987. Вып. 5. С. 4 – 15.
6. Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Применение метода характеристик для решения на ЭВМ задач распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах // Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн. М., 1971. С. 265 – 279.
7. Носиков И.А., Бессараб П.Ф., Клименко М.В., Клименко В.В. Использование метода поперечных смещений для расчета радиотрасс в модельной ионосфере // Physics of Auroral Phenomena : Proc. XXXVIII Annual Seminar. Apatity, 2015. P. 142 – 145.
8. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М., 1973. 503 с.
9. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967. 684 с.
10. Вертоградов Г.Г. Комплексные исследования ионосферного распространения декаметровых радиоволн на трассах разной протяженности : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ростов н/Д., 2007.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1973. 832 с.

### References

1. Gershman B.N., Erukhimov L.M., Yashin Yu.Ya. *Volnovye yavleniya v ionosfere i kosmicheskoi plazme* [Wave phenomena in the ionosphere and space plasma]. Moscow, 1984, 392 p.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow, 1988, 216 p.
3. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. *Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred* [Geometrical optics of inhomogeneous media]. Moscow, 1980, 304 p.
4. CCIR. *Supplement to report 252-2*. Genova, 1982, 38 p.
5. Kiyanovskii M.P., Zyryanova L.A. *Metod refraktsionnogo integrala i ego primeneniye k raschetu radiotrass* [Refractive integral method and its application to the calculation of transmission paths]. *Tekhnika sredstv svyazi. Seriya SS*. Moscow, 1987, no 5, pp. 4-15.
6. Lukin D.S., Spiridonov Yu.G. [Application of the method of characteristics for solving problems on the computer of electromagnetic wave propagation in inhomogeneous anisotropic media]. *Luchevoye priblizhenie i voprosy rasprostraneniya radiovoln* [The ray approximation and propagation issues]. Moscow, 1971, pp. 265-279.
7. Nosikov I.A., Bessarab P.F., Klimenko M.V., Klimenko V.V. *Ispol'zovanie metoda poperechnykh smeshchenii dlya rascheta radiotrass v model'noi ionosfere* [The use of transverse displacements to calculate the transmission paths in the model the ionosphere]. *Physics of Auroral Phenomena. Proc. XXXVIII Annual Seminar*. Apatity, 2015, pp. 142-145.
8. Devis K. *Radiovolny v ionosphere* [The radio waves in the ionosphere]. Moscow, 1973, 503 p.
9. Ginzburg V.L. *Rasprostraneniye elektromagnitnykh voln v plazme* [The propagation of electromagnetic waves in plasma]. Moscow, 1967. 684 s.
10. Vertogradov G.G. *Kompleksnye issledovaniya ionosfernogo rasprostraneniya dekametrovykh radiovoln na trassakh raznoi protyazhennosti* : dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk [Integrated studies of the ionospheric propagation of decameter radio waves on the routes of varying length]. Rostov-on-Don, 2007.
11. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow, 1973, 832 p.



УДК 504.55.054:622 +504.43 (470.61)

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-91-99

**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД ВОСТОЧНОГО ДОНБАССА ПО ГИДРОХИМИЧЕСКИМ ПОКАЗАТЕЛЯМ\***

© 2016 г. В.Е. Закруткин, Е.В. Гибков, Г.Ю. Склярченко, О.С. Решетняк

Закруткин Владимир Евгеньевич – доктор геолого-минералогических наук, профессор, заведующий кафедрой геоэкологии и прикладной геохимии, Институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: vezak@list.ru

Zakrutkin Vladimir Evgen'yevich – Doctor of Geologic and Mineralogical Science, Professor, Head of Department of Geocology and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vezak@list.ru

Гибков Евгений Викторович – старший преподаватель, кафедра геоэкологии и прикладной геохимии, геолого-географический факультет, Институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: irvict@mail.ru

Gibkov Evgenii Viktorovich – Senior Lecturer, Department of Geocology and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: irvict@mail.ru

Склярченко Григорий Юрьевич – кандидат геолого-минералогических наук, доцент, кафедра геоэкологии и прикладной геохимии, геолого-географический факультет, Институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: geoeco@sfedu.ru

Sklyarenko Grigoriï Yurievich – Candidate of Geologic and Mineralogical Science, Associate Professor, Department of Geocology and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: geoeco@sfedu.ru

Решетняк Ольга Сергеевна – кандидат географических наук, доцент, кафедра геоэкологии и прикладной геохимии, Институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: olgare1@rambler.ru

Reshetnyak Olga Sergeevna – Candidate of Geologic and Mineralogical Science, Associate Professor, Department of Geocology and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: olgare1@rambler.ru

Представлены результаты сравнительной оценки химического состава и качества (уровня загрязнения) поверхностных и подземных вод Восточного Донбасса по гидрохимическим показателям. В химическом составе воды выявлен одинаковый набор типоморфных компонентов-загрязнителей (Na+K, Ca, Mg, SO<sub>4</sub>, Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu). Исследуемые речные и подземные воды имеют практически уровень загрязненности по суммарному коэффициенту загрязнения. Установлены тесная взаимосвязь поверхностной и подземной гидросферы в пределах Восточного Донбасса и существенная роль техногенных шахтных вод в формировании их качества.

**Ключевые слова:** поверхностные воды, подземные воды, Восточный Донбасс, химический состав воды, уровень загрязнения, техногенные шахтные воды.

The results of comparative evaluation of chemical composition and surface and groundwater quality (pollution level) of the Eastern Donbas by hydrochemical parameters are presents in the article. The same set of typomorphic polluting components (Na+K, Ca, Mg, SO<sub>4</sub>, Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu) was identified. The investigated surface and groundwater have the same level of contamination by total factor of pollution. The close relationship between the surface and ground hydrosphere within the Eastern Donbas and the essential role of technogenic mine water in the formation of their quality was shown.

**Keywords:** surface water, groundwater, Eastern Donbas, chemical composition of water, pollution level, technogenic mine water.

Природные воды, являясь носителями вещества и энергии, выступают в качестве наиболее динамичного агента, связывающего в единое целое природные объекты основных географических оболочек Земли – атмосферы, литосферы, биосферы. При этом поверхность суши представляет собой зону с максимальными концентрациями вещества и солнечной энергии, наибольшей интенсивностью биогенных процессов, сферой активной хозяйственной деятельности человека. Все

это порождает огромное разнообразие условий, факторов, процессов, формирующих химический состав и тип природных вод, как поверхностных, так и подземных [1, 2].

В.И. Вернадский в 1933 г. высказал идею единства природных вод: «Все природные воды, где бы они ни находились, всегда связаны между собой и представляют единое целое. Всё, что происходит с любой водой в одном каком-нибудь месте, отражается в действительности на всей её земной массе» [1].

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-17-00376).

Роль природных вод в геологической истории велика и неоспорима. Состав природной воды определяет предшествующая ему история, т.е. путь, совершенный водой в процессе своего круговорота. Количество и состав растворенных минеральных и органических веществ в природной воде зависит от состава тех пород и почв, с которыми она соприкасалась, и от условий, в которых происходили эти взаимодействия. Просачиваясь через растительность и почву, вода обогащается солями и органическими веществами, меняет свой газовый состав, далее, фильтруясь через подстилающие почвы и горные породы, продолжает трансформировать свой химический состав.

Особенно заметно трансформация химического состава и качества поверхностных и подземных вод происходит в пределах природных геохимических аномальных зон, к которым, в частности, относятся угольные месторождения, в том числе Восточный Донбасс.

На протяжении многих лет Восточный Донбасс является одним из наиболее проблемных в экологическом отношении регионов Российской Федерации. Природный комплекс здесь подвергается интенсивному техногенному воздействию. Основной вклад в осложнение экологической ситуации вносят предприятия угольной промышленности. Начавшаяся в 90-е гг. реструктуризация угледобывающей отрасли, основу которой составляет ликвидация нерентабельных шахт, заметно усилила негативные явления. Длительная разработка угольных месторождений и последующая массовая ликвидация угольных шахт привели к значительной трансформации геохимических процессов в Восточном Донбассе Ростовской области [3, 4].

При этом особенно высокую техногенную нагрузку испытывают поверхностные и подземные воды региона. Наиболее уязвимыми оказались малые реки (Большой и Малый Несветай, Аюта, Грушевка, Кадамовка, Кундрючья, Лихая и др.). Многие из них утратили свои естественные природные функции, произошла массовая гибель фито- и зоопланктона, стало невозможным использование поверхностных вод не только для питьевых нужд населения, но и для хозяйственных целей. Аналогичная ситуация характерна и для подземной гидросферы.

Всё это требует выявления основных источников загрязнения поверхностных и подземных вод, проведения комплексной оценки их состояния, разработки и реализации действенных мер, направленных на предотвращение (или минимизацию) негативного антропогенного воздействия на поверхностную и подземную гидросферы данного региона, оздоровление здесь в целом экологической обстановки.

Целью данного исследования является сравнительная оценка качества (уровня загрязнения) поверхностных и подземных вод Восточного Донбасса по гидрохимическим показателям.

Изучение взаимосвязи химического состава и степени загрязненности поверхностных и подземных вод проведено в рамках исследований, выполненных в 2014–2015 гг. по гранту РФ «Интегральная оценка и прогноз состояния водных ресурсов и их качества в пределах техногенно нарушенных геосистем углепромышленных территорий на основе комплексных геохимических, геофизических и экотоксикологических исследований». Эта проблема особенно актуальна для данного региона в связи с реструктуризацией угольной промышленности, активно происходящей в последние двадцать лет и приведшей к обострению экологической ситуации.

Объектами исследования являлись подземные и поверхностные воды, в частности реки бассейна Северского Донца (Большая Каменка, Большая Гнилуша, Быстрая, Калитва, Кундрючья, Лихая, Малая Каменка и Северский Донец) и Тузлова (Большой и Малый Несветай, Грушевка, Кадамовка, Аюта, Атюхта и Тузлов). Пробы речной воды отбирались равномерно по длине водотоков, охватывая верховья рек, средние их участки и устья (всего 38 створов).

Подземные воды изучались в пределах основных углепромышленных районов Восточного Донбасса, территориально совпадающих с упомянутыми выше речными бассейнами. Так, в частности, Шахтинский и Новошахтинский углепромышленные районы соответствуют бассейну реки Тузлов, а Гуковский и Шолоховский – реки Северский Донец. Всего исследовано 39 гидрогеологических скважин, вскрывших подземные воды каменноугольного горизонта, имеющего повсеместную распространенность.

Сравнительная оценка химического состава поверхностных и подземных вод проводилась по следующим гидрохимическим показателям: pH, концентрация растворенного в воде кислорода, минерализация, содержание главных ионов – хлориды ( $\text{Cl}^-$ ), сульфаты ( $\text{SO}_4^{2-}$ ), гидрокарбонаты ( $\text{HCO}_3^-$ ), кальций ( $\text{Ca}^{2+}$ ), магний ( $\text{Mg}^{2+}$ ), натрий и калий ( $\text{Na}^+ + \text{K}^+$ ), а также микроэлементов – Fe, Al, Be, Li, Ni, Co, Mn, Cu, Sr, Zn.

Оценка уровня загрязненности поверхностных и подземных вод также проведена по единой методике. При этом за основу взята система интегральной оценки качества подземных вод, предложенная А.П. Белоусовой [5], которая предусматривает расчет суммарного коэффициента загрязнения (СКЗ) по формуле  $\text{СКЗ} = \sum C_i/\text{ПДК}_i$ , где  $C_i$  – концентра-

ция  $i$ -го компонента; ПДК <sub>$i$</sub>  – предельно допустимая концентрация  $i$ -го компонента, утвержденная для оценки качества воды, используемой для питьевого водоснабжения [6].

На основании значений СКЗ приняты следующие категории загрязненности поверхностных и подземных вод: 1) СКЗ<1 – условно чистая; 2) СКЗ=1–5 – слабозагрязненная; 3) СКЗ=5–10 – весьма загрязненная; 4) СКЗ=10–20 – очень загрязненная; 5) СКЗ=20–50 – грязная и очень грязная; 6) СКЗ>50 – чрезвычайно грязная.

В основу расчетов положены данные о химическом составе поверхностных и подземных вод, полученные в ходе экспедиционных исследований 2014–2015 гг.

В табл. 1 приведены содержания макрокомпо-

нентов в реках Восточного Донбасса. Как видно из табличных данных, минерализация речных вод варьирует в широких пределах – от 876 до 6094 мг/дм<sup>3</sup>, достигая наибольших значений в реках Атюхта (в среднем 6649 мг/дм<sup>3</sup>), Аюта (4387 мг/дм<sup>3</sup>), Малый Несветай (4184 мг/дм<sup>3</sup>), Большая Гнилуша (3101 мг/дм<sup>3</sup>), Кундрючья (2867 мг/дм<sup>3</sup>). В анионном составе вод доминируют сульфат-ионы, в катионном – натрий и калий. Важно отметить, что речные воды бассейна Тузлова заметно (в 1,4–2,0 раза) превосходят водотоки бассейна Северского Донца по содержанию практически всех макрокомпонентов. Это может свидетельствовать о неодинаковой техногенной нагрузке, которую испытывают речные экосистемы двух бассейнов.

Таблица 1

## Характеристика поверхностных вод Восточного Донбасса по содержанию макрокомпонентов

Река	Na <sup>+</sup> +K <sup>+</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	Cl <sup>-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	M*
Бассейн Тузлова						
Аюта	$\frac{620}{283 - 1223}$ (3,1)**	$\frac{334}{258 - 430}$ (1,9)	$\frac{148}{70 - 192}$ (2,9)	$\frac{238}{132 - 333}$ (0,7)	$\frac{2371}{1190 - 3323}$ (4,7)	$\frac{4387}{2282 - 6094}$ (4,3)
Большой Несветай	$\frac{517}{190 - 1037}$ (2,6)	$\frac{256}{146 - 355}$ (1,4)	$\frac{106}{60 - 159}$ (2,1)	$\frac{220}{25 - 404}$ (0,6)	$\frac{1778}{691 - 3139}$ (3,5)	$\frac{3306}{1480 - 5708}$ (3,3)
Грушевка	$\frac{397}{197 - 582}$ (1,98)	$\frac{233}{190 - 293}$ (1,3)	$\frac{88}{46 - 121}$ (1,4)	$\frac{228}{133 - 277}$ (0,6)	$\frac{1382}{705 - 2072}$ (2,7)	$\frac{2807}{1458 - 3992}$ (2,8)
Кадамовка	$\frac{459}{120 - 918}$ (2,3)	$\frac{282}{222 - 342}$ (1,6)	$\frac{116}{31 - 169}$ (2,3)	$\frac{281}{152 - 478}$ (0,8)	$\frac{1696}{353 - 2527}$ (3,4)	$\frac{3309}{876 - 5004}$ (3,3)
Малый Несветай	$\frac{592}{382 - 789}$ (2,9)	$\frac{195}{176 - 218}$ (1,1)	$\frac{140}{105 - 231}$ (2,8)	$\frac{240}{132 - 346}$ (0,7)	$\frac{2314}{1651 - 3071}$ (4,6)	$\frac{4184}{3220 - 5036}$ (4,2)
Атюхта	$\frac{1159}{1030 - 1258}$ (5,8)	$\frac{373}{366 - 380}$ (2,1)	$\frac{159}{144 - 171}$ (3,1)	$\frac{596}{586 - 603}$ (1,7)	$\frac{3347}{3193 - 3488}$ (6,6)	$\frac{6649}{6380 - 6800}$ (6,6)
Среднее по бассейну	624 (3,1)	276 (1,5)	126 (2,5)	341 (0,9)	2148 (4,3)	4110 (4,11)
Бассейн Северского Донца						
Большая Каменка	$\frac{316}{276 - 343}$ (2,6)	$\frac{151}{145 - 158}$ (0,8)	$\frac{47}{43 - 49}$ (0,95)	$\frac{220}{169 - 257}$ (0,6)	$\frac{641}{573 - 755}$ (1,2)	$\frac{1687}{1476 - 1856}$ (1,7)
Большая Гнилуша	$\frac{556}{498 - 627}$ (2,8)	$\frac{206}{198 - 216}$ (1,2)	$\frac{87}{74 - 97}$ (1,8)	$\frac{204}{194 - 214}$ (0,6)	$\frac{1568}{1421 - 1694}$ (3,1)	$\frac{3101}{2982 - 3228}$ (3,1)
Быстрая	$\frac{194}{109 - 353}$ (0,95)	$\frac{199}{135 - 263}$ (1,1)	$\frac{43}{28 - 65}$ (0,9)	$\frac{293}{185 - 449}$ (0,83)	$\frac{514}{303 - 786}$ (1,1)	$\frac{1525}{926 - 2218}$ (1,5)
Калитва	$\frac{124}{91 - 170}$ (0,6)	$\frac{163}{147 - 187}$ (0,9)	$\frac{31}{25 - 34}$ (0,6)	$\frac{267}{185 - 502}$ (0,7)	$\frac{422}{336 - 455}$ (0,8)	$\frac{1189}{896 - 1434}$ (1,2)
Кундрючья	$\frac{490}{397 - 631}$ (2,5)	$\frac{169}{163 - 174}$ (0,9)	$\frac{80}{74 - 88}$ (1,6)	$\frac{210}{181 - 256}$ (0,4)	$\frac{1429}{1146 - 1662}$ (2,9)	$\frac{2867}{2536 - 3160}$ (2,9)
Лихая	$\frac{263}{142 - 412}$ (1,3)	$\frac{167}{109 - 226}$ (0,9)	$\frac{88}{52 - 113}$ (1,8)	$\frac{224}{66 - 466}$ (0,6)	$\frac{1114}{710 - 466}$ (2,2)	$\frac{2400}{1680 - 3212}$ (2,4)
Малая Каменка	$\frac{238}{168 - 313}$ (1,2)	$\frac{125}{107 - 144}$ (0,6)	$\frac{55}{32 - 72}$ (1,1)	$\frac{320}{242 - 391}$ (0,9)	$\frac{624}{250 - 856}$ (1,2)	$\frac{1753}{1174 - 2096}$ (1,7)
Среднее по бассейну	293 (1,5)	144 (0,8)	59 (1,2)	243 (0,7)	851 (1,7)	2060 (2,06)

\* – M – минерализация воды, мг/дм<sup>3</sup>; \*\* – в числителе приведены средние значения концентраций, мг/дм<sup>3</sup>, в знаменателе – пределы изменения концентрации, мг/дм<sup>3</sup>, в скобках – кратность превышения ПДК.

В микроэлементном составе речных вод (табл. 2) явно доминируют Sr, Fe, Al, Mn, в меньшей степени Li. При этом максимальные содержания Sr составляют 8,33 мг/дм<sup>3</sup> (р. Аюта), а обычные лежат в

пределах 2–4 мг/дм<sup>3</sup>. Концентрации Fe, Al, Mn и Li заметно ниже (по средним значениям для рек соответственно 0,09–1,49; 0,10–0,71; 0,11–1,01; 0,02–0,31 мг/дм<sup>3</sup>), а остальных элементов (Zn, Cu,

Ве) – минимальны (соответственно сотые, тысячные и десятитысячные доли мг/дм<sup>3</sup>). Как и следовало ожидать, реки бассейна Тузлова опережают реки

бассейна Северского Донца по содержанию большинства микроэлементов. Причем наиболее существенно они различаются по количеству Sr и Mn.

Таблица 2

Характеристика поверхностных вод Восточного Донбасса по содержанию микрокомпонентов

Река	Fe	Al	Be	Li	Mn	Cu	Sr	Zn
Бассейн Тузлова								
Аюта	$\frac{0,91}{0,06-3,34}$ (3,1)*	$\frac{0,65}{0,01-3,32}$ (3,2)	$\frac{0,0007}{0,0002-0,0013}$ (3,5)	$\frac{0,24}{0,04-0,74}$ (8,0)	$\frac{0,34}{0,03-0,93}$ (3,4)	$\frac{0,003}{0,001-0,008}$ (3,0)	$\frac{5,88}{3,25-8,33}$ (0,8)	$\frac{0,011}{0,005-0,02}$ (0,01)
Большой Несветай	$\frac{0,30}{0,09-0,52}$ (1,0)	$\frac{0,18}{0,03-0,49}$ (0,9)	$\frac{0,0006}{0,0002-0,0015}$ (2,0)	$\frac{0,09}{0,02-0,17}$ (3,0)	$\frac{0,19}{0,014-0,54}$ (1,9)	$\frac{0,003}{0,001-0,005}$ (3,0)	$\frac{3,85}{2,14-5,90}$ (0,6)	$\frac{0,051}{0,005-0,141}$ (0,05)
Грушевка	$\frac{0,88}{0,14-4,12}$ (2,9)	$\frac{0,52}{0,12-1,22}$ (2,6)	$\frac{0,0005}{0,0001-0,0009}$ (2,5)	$\frac{0,09}{0,04-0,16}$ (3,0)	$\frac{0,24}{0,1-0,49}$ (2,4)	$\frac{0,005}{0,001-0,024}$ (5,0)	$\frac{3,46}{1,82-4,37}$ (0,5)	$\frac{0,01}{0,01-0,03}$ (0,01)
Кадамовка	$\frac{0,67}{0,09-1,67}$ (2,2)	$\frac{0,62}{0,03-1,82}$ (3,1)	$\frac{0,0005}{0,0001-0,0012}$ (2,5)	$\frac{0,10}{0,01-0,32}$ (3,3)	$\frac{0,68}{0,05-3,67}$ (6,8)	$\frac{0,004}{0,002-0,008}$ (4,0)	$\frac{3,10}{0,89-5,22}$ (0,5)	$\frac{0,02}{0,01-0,05}$ (0,02)
Малый Несветай	$\frac{0,27}{0,11-0,64}$ (0,9)	$\frac{0,23}{0,04-0,67}$ (1,1)	$\frac{0,0005}{0,0002-0,0007}$ (2,5)	$\frac{0,22}{0,07-0,35}$ (7,6)	$\frac{0,43}{0,01-1,28}$ (4,3)	$\frac{0,005}{0,001-0,019}$ (5,0)	$\frac{4,74}{3,57-5,38}$ (0,7)	$\frac{0,05}{0,01-0,22}$ (0,05)
Атюхта	$\frac{0,09}{0,07-0,11}$ (0,3)	$\frac{0,15}{0,03-0,37}$ (0,8)	$\frac{0,0006}{0,0004-0,0007}$ (3,0)	$\frac{0,31}{0,29-0,32}$ (10,3)	$\frac{0,23}{0,08-0,43}$ (2,3)	$\frac{0,004}{0,003-0,005}$ (4,0)	$\frac{7,27}{7,16-7,45}$ (1,1)	$\frac{0,007}{0,006-0,008}$ (0,01)
Среднее по бассейну	0,51 (1,7)	0,49 (2,5)	0,0006 (3,0)	0,17 (5,8)	0,35 (3,5)	0,004 (4,0)	4,64 (0,7)	0,05 (0,05)
Бассейн Северского Донца								
Большая Каменка	$\frac{0,43}{0,16-0,81}$ (1,5)	$\frac{0,26}{0,17-0,34}$ (1,3)	$\frac{0,0004}{0,0002-0,0006}$ (2,0)	$\frac{0,18}{0,15-0,23}$ (6,0)	$\frac{0,12}{0,1-0,18}$ (1,2)	$\frac{0,004}{0,002-0,005}$ (4,0)	$\frac{1,55}{1,41-1,63}$ (0,2)	$\frac{0,016}{0,012-0,02}$ (0,016)
Большая Гнилуша	$\frac{0,73}{0,12-2,69}$ (2,4)	$\frac{0,71}{0,13-2,29}$ (3,5)	$\frac{0,0006}{0,0001-0,0009}$ (2,0)	$\frac{0,27}{0,15-0,39}$ (9,0)	$\frac{0,20}{0,10-0,35}$ (2,0)	$\frac{0,004}{0,001-0,006}$ (4,0)	$\frac{4,47}{3,91-5,18}$ (0,6)	$\frac{0,02}{0,01-0,04}$ (0,02)
Быстрая	$\frac{0,30}{0,10-0,57}$ (1,0)	$\frac{0,14}{0,03-0,33}$ (0,7)	$\frac{0,0010}{0,0008-0,0012}$ (0,5)	$\frac{0,02}{0,01-0,04}$ (0,7)	$\frac{0,14}{0,04-0,39}$ (1,4)	$\frac{0,002}{0,002-0,003}$ (2,0)	$\frac{1,72}{1,11-2,57}$ (0,2)	$\frac{0,01}{0,007-0,011}$ (0,01)
Калитва	$\frac{0,22}{0,09-0,47}$ (0,8)	$\frac{0,10}{0,02-0,30}$ (0,5)	$\frac{0,0003}{0,0001-0,0006}$ (1,5)	$\frac{0,02}{0,01-0,03}$ (0,7)	$\frac{0,11}{0,01-0,27}$ (1,1)	$\frac{0,004}{0,001-0,006}$ (4,0)	$\frac{1,52}{1,26-1,64}$ (0,2)	$\frac{0,02}{0,01-0,06}$ (0,02)
Кундрючья	$\frac{1,49}{0,57-4,04}$ (4,9)	$\frac{1,15}{0,19-2,42}$ (5,6)	$\frac{0,0005}{0,0002-0,0007}$ (2,5)	$\frac{0,21}{0,12-0,29}$ (7,0)	$\frac{0,23}{0,05-0,47}$ (2,3)	$\frac{0,005}{0,002-0,008}$ (5,0)	$\frac{3,37}{2,99-3,91}$ (0,4)	$\frac{0,02}{0,01-0,03}$ (0,02)
Лихая	$\frac{0,44}{0,10-0,98}$ (1,5)	$\frac{0,31}{0,09-0,83}$ (1,5)	$\frac{0,0007}{0,0001-0,0011}$ (3,5)	$\frac{0,04}{0,02-0,05}$ (1,3)	$\frac{0,22}{0,03-0,53}$ (2,2)	$\frac{0,003}{0,002-0,005}$ (3,0)	$\frac{2,67}{1,80-3,45}$ (0,3)	$\frac{0,012}{0,01-0,016}$ (0,01)
Среднее по бассейну	0,54 (1,8)	0,38 (1,9)	0,0006 (3,0)	0,10 (3,5)	0,23 (2,3)	0,004 (4,0)	2,87 (0,4)	0,04 (0,04)

\* – в числителе – средние значения, мг/дм<sup>3</sup>, в скобках – кратность превышения ПДК [6], в знаменателе – пределы изменения концентрации, мг/дм<sup>3</sup>.

Об уровне загрязненности поверхностных вод можно судить по данным табл. 3 и 4, где приведены значения интегрального показателя – СКЗ. Как видно, его величина варьирует в широких пределах – от 4,6 до 45,6, что соответствует категориям «слабозагрязненная» – «грязная и очень грязная». По степени уменьшения значений СКЗ реки бассейна Северского Донца располагаются в такой последовательности: Малая Каменка – Большая Гнилуша – Кундрючья – Лихая – Большая Каменка – Быстрая – Калитва. В бассейне Тузлова этот ряд выглядит следующим образом: Малый Несветай – Атюхта – Аюта – Кадамовка – Грушевка – Большой Несветай. При сопоставлении качества речной воды двух изучаемых бассейнов выясняется, что в большинстве рек бассейна Тузлова вода отвечает категории «грязная и очень грязная» (средняя величина СКЗ 29,4), в то время как в бассейне Северского Донца (СКЗ 19,3) она в ряде случаев (реки Калитва, Быст-

рая) заметно чище. Данное обстоятельство объясняется разным уровнем антропогенной нагрузки, которую испытывают поверхностные воды двух бассейнов. Как показали наши исследования [7], в речную сеть бассейна Тузлова только с техногенными шахтными водами поступает 363 375 т/год загрязняющих веществ, в то время как для бассейна Северского Донца это количество составляет всего лишь 42 128 т/год.

Следует еще раз подчеркнуть, что наиболее уязвимыми к антропогенному воздействию, как правило, оказываются малые реки, составляющие верхние звенья речной сети. Поэтому уровень их загрязненности всегда существенно выше, чем в средних и тем более крупных реках. Это, например, видно при сравнении величин СКЗ в воде реки Тузлов (14,7) и её притоков первого и второго порядков – Большого Несветая (15,9), Малого Несветая (45,6), а в соседнем бассейне – в речных

водах Северского Донца (8,2), Кундрючьей (27,7), Большой Гнилуши (31,2). Важно также отметить, что с увеличением значений СКЗ расширяется и набор компонентов – загрязнителей речных вод

(табл. 3 и 4). Его основу в большинстве рек формируют сульфат-ион ( $\text{SO}_4^{2-}$ ), щелочные (Na+K) и щелочно-земельные металлы (Ca и Mg), а из микроэлементов – Cu, Li, Be, Mn, Al, Fe.

Таблица 3

## Характеристика загрязненности речных вод в бассейне Северского Донца по СКЗ

Река	СКЗ	Ассоциация компонентов-загрязнителей	Категория загрязненности
Калитва	4,6	Be, Mn, Cu	Слабозагрязненная
Быстрая	7,8	Ca, $\text{SO}_4$ , Fe, Mn, Be, Cu	Весьма загрязненная
Большая Каменка	12,4	Na+K, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Очень загрязненная
Лихая	12,3	Na+K, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Очень загрязненная
Кундрючья	27,7	Na+K, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Грязная и очень грязная
Большая Гнилуша	31,2	Na+K, Ca, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Грязная и очень грязная
Малая Каменка	39,3	Na+K, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Mn, Cu	Грязная и очень грязная
Среднее для бассейна	17,9	Na+K, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Очень загрязненная

Таблица 4

## Характеристика загрязненности речных вод бассейна Тузлов по СКЗ

Река	СКЗ	Ассоциация компонентов-загрязнителей	Категория загрязненности
Большой Несветай	15,9	Na+K, Ca, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Be, Li, Mn, Cu	Очень загрязненная
Грушевка	18,6	Na+K, Ca, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Очень загрязненная
Кадамовка	28,5	Na+K, Ca, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Грязная и очень грязная
Аюта	31,3	Na+K, Ca, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Грязная и очень грязная
Атюхта	36,5	Na+K, Ca, Mg, Cl, $\text{SO}_4$ , Al, Be, Li, Mn, Cu, Sr	Грязная и очень грязная
Малый Несветай	45,6	Na+K, Ca, Mg, $\text{SO}_4$ , Al, Be, Li, Mn, Cu	Грязная и очень грязная
Среднее для бассейна	27,3	Na+K, Ca, Mg, $\text{SO}_4$ , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Грязная и очень грязная

Подземные воды Восточного Донбасса также характеризуются сложным химическим составом. В его анионной части (табл. 5) в большинстве случаев преобладают сульфат-ионы ( $\text{SO}_4^{2-}$ ). Это типично как для региона в целом, так и для отдельных угольных районов. Однако по содержанию этого компонента угольные районы существенно различаются: максимальные их количества (77,0 – 4128,0; в среднем 1670,0 мг/дм<sup>3</sup>) установлены в Новошахтинском районе, а минимальные – в Шахтинском (288,0 – 1056,0; в среднем 685,0 мг/дм<sup>3</sup>).

Среди катионов повсеместно лидирующие позиции занимают Na и K, содержание которых по районам убывает в ряду Новошахтинский (225,0 – 1306,0; в среднем 612,0 мг/дм<sup>3</sup>) – Шахтинский (165,0 – 1100,0; в среднем 529,0 мг/дм<sup>3</sup>) – Шолоховский (35,0 – 541,0; в среднем 305,0 мг/дм<sup>3</sup>) – Гуковский (65,0 – 330,0; в среднем 225,0 мг/дм<sup>3</sup>)

район. Среди катионов щелочно-земельных элементов во всех наблюдательных скважинах преобладает  $\text{Ca}^{2+}$ , средние содержания которого превышают соответствующие количества  $\text{Mg}^{2+}$  в 1,7 – 2,4 раза. Средние по районам содержания кальция изменяются пропорционально содержаниям сульфат- и гидрокарбонат-ионов.

Воды Новошахтинского, Гуковского и Шолоховского районов относятся к гидрокарбонатно-сульфатному натриевому типу, а Шахтинского – к хлоридно-сульфатному натриевому. При этом в группе анионов наиболее нестабильное распределение свойственно сульфат-иону и хлорид-иону, в то время как гидрокарбонат-ионы распространяются в подземных водах по площади районов относительно равномерно [8].

Таблица 5

Содержание макрокомпонентов в подземных (в том числе шахтных) водах, мг/дм<sup>3</sup>

Район	Na <sup>+</sup> +K <sup>+</sup>	Ca <sup>2+</sup>	Mg <sup>2+</sup>	Cl <sup>-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	M
Новошахтинский	$\frac{612}{295-1305}$ (3,1)	$\frac{269}{32-457}$ (1,5)	$\frac{184}{78-331}$ (3,7)	$\frac{384}{150-712}$ (1,1)	$\frac{1670}{77-4128}$ (3,4)	$\frac{3619}{1468-7184}$ (3,6)
Шахтинский	$\frac{529}{165-1100}$ (2,6)	$\frac{166}{24-337}$ (0,9)	$\frac{97}{39-195}$ (2,0)	$\frac{639}{121-1815}$ (1,8)	$\frac{685}{288-1056}$ (1,3)	$\frac{2430}{1348-4948}$ (2,4)
Гуковский	$\frac{225}{65-330}$ (1,1)	$\frac{230}{136-361}$ (1,3)	$\frac{118}{54-219}$ (2,4)	$\frac{172}{78-338}$ (0,5)	$\frac{877}{227,0-2246,4}$ (1,8)	$\frac{1951}{924,0-7504}$ (1,9)
Шолоховский	$\frac{305}{35-541}$ (1,5)	$\frac{192}{64-453}$ (1,1)	$\frac{110}{39-243}$ (2,2)	$\frac{283}{35,6-605,1}$ (0,8)	$\frac{808}{192,0-1824,0}$ (1,6)	$\frac{2031}{712,0-3832}$ (2,0)
Шахтные воды	$\frac{988}{727-1581}$	$\frac{394}{285-497}$	$\frac{326}{194-958}$	$\frac{374}{171-806}$	$\frac{3258}{1632-6912}$	$\frac{6028}{4226-11728}$

Примечание. См. табл. 1.

Микрокомпонентный состав подземных вод (табл. 6) достаточно однообразен. Вместе с тем примечательной особенностью территориального распределения микрокомпонентов в этих водах

является обогащенность их железом в Шахтинском и Шолоховском районах (в среднем соответственно 3,06 и 2,26 мг/дм<sup>3</sup>), марганцем – в Гуковском и Новошахтинском (1,61 и 1,47 мг/дм<sup>3</sup>).

Таблица 6

Содержание микроэлементов в подземных (в том числе шахтных) водах Восточного Донбасса, мг/дм<sup>3</sup>

Район	Fe	Al	Be	Li	Mn	Sr	Zn
Новошахтинский	$\frac{0,88}{0,07-4,93}$ (2,91)*	$\frac{0,07}{0,02-0,15}$ (0,35)	$\frac{0,0009}{0,0002-0,0019}$ (4,5)	$\frac{0,05}{0,01-0,12}$ (1,67)	$\frac{1,47}{0,12-3,14}$ (14,7)	$\frac{3,55}{0,34-7,35}$ (0,48)	$\frac{0,05}{0,01-0,09}$ (0,05)
Шахтинский	$\frac{3,06}{0,2-12,8}$ (10,2)	$\frac{0,13}{0,02-0,67}$ (0,65)	$\frac{0,0004}{0,0002-0,0006}$ (2,0)	$\frac{0,04}{0,01-0,11}$ (1,3)	$\frac{0,26}{0,03-0,75}$ (2,6)	$\frac{2,32}{0,05-7,61}$ (0,33)	$\frac{0,05}{0,02-0,35}$ (0,05)
Гуковский	$\frac{0,76}{0,3-1,14}$ (2,53)	$\frac{0,06}{0,02-0,13}$ (0,3)	$\frac{0,0006}{0,00050,0007}$ (3,0)	$\frac{0,04}{0,01-0,09}$ (1,3)	$\frac{1,61}{0,3-3,34}$ (16,1)	$\frac{3,25}{1,47-6,25}$ (0,47)	$\frac{0,09}{0,04-0,18}$ (0,09)
Шолоховский	$\frac{2,26}{0,36-8,27}$ (7,53)	$\frac{0,10}{0,02-0,51}$ (0,5)	$\frac{0,0006}{0,0003-0,0009}$ (3,0)	$\frac{0,02}{0,01-0,04}$ (0,67)	$\frac{0,28}{0,01-1,57}$ (2,8)	$\frac{3,12}{0,69-7,01}$ (0,45)	$\frac{0,31}{0,06-1,0}$ (0,31)
Шахтные воды	$\frac{86,98}{18,1-692,4}$	$\frac{0,44}{0,02-0,74}$	$\frac{0,0008}{0,0002-0,0013}$	$\frac{0,16}{0,03-0,27}$	$\frac{7,31}{1,66-28,19}$	$\frac{6,24}{2,24-9,25}$	$\frac{0,10}{0,006-0,89}$ (0,1)

\* – в числителе приведены средние значения концентраций, мг/дм<sup>3</sup>, в скобках – кратность превышения ПДК [6], в знаменателе – пределы изменения концентрации, мг/дм<sup>3</sup>.

Интегральная оценка качества по суммарному коэффициенту загрязнения показала, что изучаемые подземные воды каменноугольного горизонта, повсеместно распространенные в пределах Восточного Донбасса, относятся к 5-й категории, т.е. «грязные и очень грязные», в пределах Новошахтинского и Шахтинского угольных районов и 4-й, т.е. «очень загрязненные» – в пределах Гуковского и Шолоховского (табл. 7). Вместе с тем в Шахтинском и Новошахтинском углепромышленных районах, где объекты угледобычи (действующие и ликвидированные мокрым способом шахты, породные отвалы и др.) имеют наибольшее распространение, на отдельных площадях присутствуют чрезвычайно грязные подземные воды.

Если сравнить химический состав поверхност-

ных и подземных вод, то окажется, что и те и другие характеризуются одинаковым набором типоморфных компонентов-загрязнителей. В их числе Na+K, Ca, Mg, SO<sub>4</sub>, Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu. Особенно впечатляет практически полное совпадение уровня загрязненности вод в пределах отдельных бассейнов по величине суммарного показателя (СКЗ). Данные обстоятельства свидетельствуют, с одной стороны, о том, что поверхностные и подземные воды Восточного Донбасса, тесно взаимодействуя друг с другом, находятся в состоянии динамического равновесия, а с другой – что в формировании их химического состава участвует единый (но, естественно, не единственный) мощный источник загрязнения. Таковыми являются техногенные шахтные воды.

Таблица 7

## Характеристика загрязненности подземных (в том числе шахтных) вод Восточного Донбасса по СКЗ

Район	СКЗ	Ассоциация элементов	Категория загрязненности
Новошахтинский	33,62	Na+K, Ca, Mg, Cl, SO <sub>4</sub> , Fe <sub>общ</sub> , Be, Li, Mn,	Грязная и очень грязная
Шахтинский	24,11	Na+K, Mg, Cl, SO <sub>4</sub> , Fe <sub>общ</sub> , Be, Li, Mn	Грязная и очень грязная
Среднее для районов (бассейн Тузлова)	27,44	Na+K, Mg, Cl, SO <sub>4</sub> , Fe, Al, Be, Li, Mn	Грязная и очень грязная
Гуковский	19,08	Na+K, Ca, Mg, SO <sub>4</sub> , Fe, Be, Li, Mn	Очень загрязненная
Шолоховский	15,83	Na+K, Ca, Mg, SO <sub>4</sub> , Fe, Be, Mn	Очень загрязненная
Среднее для районов (бассейн Северского Донца)	17,62	Na+K, Ca, Mg, SO <sub>4</sub> , Fe, Be, Mn	Очень загрязненная
Шахтные воды	396,7	Na+K, Ca, Mg, SO <sub>4</sub> , Fe, Al, Be, Li, Mn, Cu	Чрезвычайно грязная

Как известно, шахтные воды угольных бассейнов формируются за счет подземных вод, дренирующих горные выработки. Дополнительным источником может служить инфильтрация в горные выработки атмосферных осадков и поверхностных вод из прилегающих водных объектов, что особенно характерно для Восточного Донбасса, где трещиноватые горные породы пользуются широким распространением.

По своему составу шахтные воды сильно отличаются от исходных подземных вод по общей минерализации и содержанию большинства макро- и микрокомпонентов. В частности, в углепромышленных районах Восточного Донбасса их минерализация изменяется в пределах 1,3 – 4,5 г/л, а в отдельных случаях достигает 10 – 12 г/л. По химическому составу это преимущественно воды сульфатного класса натриевой группы.

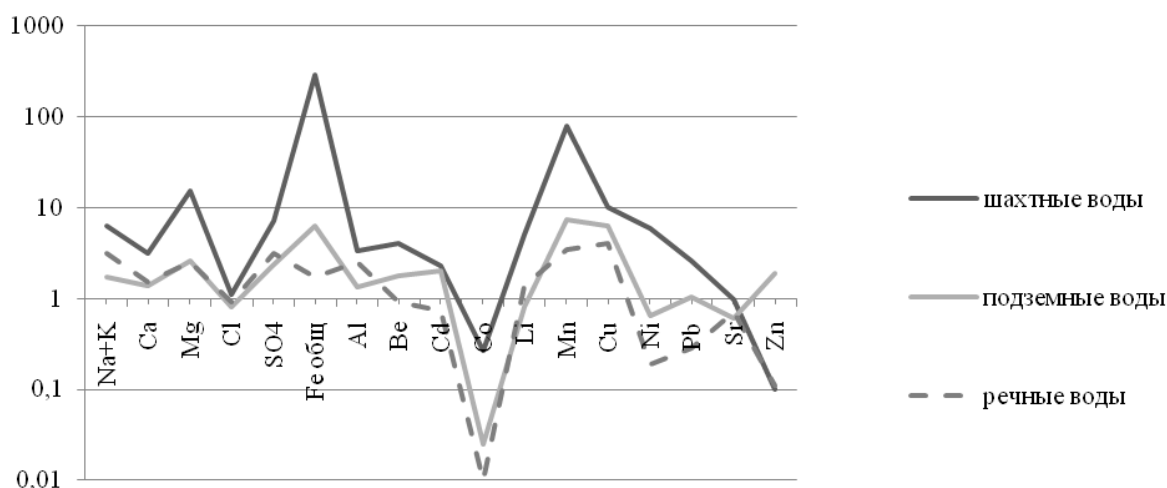
Химический состав шахтных вод непостоянен и заметно изменяется со временем. Так, по некоторым данным [9], за 5 лет эксплуатации угольных месторождений минерализация вод в отдельных шахтах Восточного Донбасса увеличилась на 9–13 %. При этом класс воды сменился с гидрокарбонатного на сульфатный, а местами – на хлоридный. В катионном составе отмечен рост содержания натрия.

Наиболее существенные изменения в химическом составе шахтных вод произошли в последние 20–25 лет в связи с реструктуризацией угольной промышленности, предусматривающей ликвидацию нерентабельных шахт путем их затопления. Как показали наши расчеты, минерализация шахтных вод за этот период возросла в среднем на 55 %, а количество отдельных макрокомпонентов (сульфатов, Mg и Ca) увеличилось на 100 – 150 %. Аналогичные изменения произошли и в микрокомпонентном составе шахтных вод. В частности, содержания железа и марганца в водах ликвидированных шахт оказались в десятки раз выше, чем в водах

периода их эксплуатации. Вместе с тем, как видно из данных табл. 5–7, состав компонентов – загрязнителей техногенных шахтных вод в значительной степени соответствует набору типоморфных элементов в подземных и речных водах данного региона. Это свидетельствует о существенной роли техногенных шахтных вод в формировании качества поверхностной и подземной гидросферы. Дополнительным аргументом в пользу такого вывода служат геохимические спектры подземных, речных и шахтных вод, приведенные на рисунке. Как видно, эти спектры в значительной степени симбатны, т.е. повторяют друг друга (имеют схожий ход изменения).

Затопление нерентабельных шахт способствовало поступлению техногенных шахтных вод в водонесные горизонты и формированию ореолов распространения сильнозагрязненных подземных вод, непригодных для хозяйственно-питьевого водоснабжения местного населения. Такая обстановка сложилась в ряде населенных пунктов Октябрьского и Красносулинского районов Ростовской области.

Ликвидация объектов добычи угля оказала резко негативное влияние и на качество поверхностных вод за счет сброса на рельеф и поступления в речную сеть сильнозагрязненных шахтных вод. Объектами такого влияния оказались, в частности, реки Кадамовка, Малый и Большой Несветай, Аюта, Кундрючья, Гнилуша, Лихая, Бургуста, Малая Каменка. В них, по некоторым оценкам [10], поступает от 150 до 2500 м<sup>3</sup>/ч таких вод. Следует также учитывать высокую вероятность загрязнения речных вод не только сверху, но и снизу в связи с подъемом уровня подземных вод и выходом их на поверхность по тектонически нарушенным зонам как естественного, так и техногенного происхождения. Увеличение питания рек и водоемов подземными водами в результате ликвидации шахт Восточного Донбасса отмечалось рядом исследователей [10, 11].



Геохимические спектры шахтных, подземных и речных вод Восточного Донбасса

Таким образом, приведенные выше материалы гидрохимических исследований свидетельствуют о том, что поверхностные и подземные воды Восточного Донбасса находятся в состоянии двусторонней гидравлической связи. Она выражается в том, что подземные воды в течение всего года питают поверхностные водотоки, а последние, в свою очередь, – водоносные горизонты подрусловых грунтовых вод и грунтовых вод прибрежной полосы. Не исключено, что подобный водообмен существовал и до начала освоения Восточного Донбасса. Но тогда он, скорее всего, имел локальный характер. В процессе эксплуатации угольных месторождений, особенно в результате массовой ликвидации нерентабельных шахт, ареалы активного водообмена между поверхностными и подземными водами значительно расширились. Этому способствовало развитие техногенных пликтивных и особенно дизъюнктивных нарушений в горно-породном массиве, обеспечивающих высокую вертикальную проницаемость зоны аэрации.

Как известно, в соответствии с существующей в настоящее время природоохранной и водохозяйственной политикой оценка поверхностных и подземных ресурсов осуществляется изолированно: по водохозяйственным балансам для поверхностного стока, по эксплуатационным запасам – для подземного. Результаты проведенных исследований убеждают в том, что эффективное решение гидроэкологических проблем в данном регионе возможно только на основе совместного использования, управления и оценки речных и подземных водных ресурсов. При этом необходимо учитывать, что основной вклад в ухудшение их качества в данном регионе принадлежит техногенным шахтным водам, минимизация воздействия которых на поверх-

ностную и подземную гидросферы должна стать приоритетной задачей природоохранных органов.

#### Литература

1. Вернадский В.И. История природных вод. М., 2003. 751 с.
2. Никаноров А.М. Гидрохимия : учебник. Ростов н/Д., 2008. 461 с.
3. Закруткин В.Е., Иваник В.М., Гибков Е.В., Скляр В.В. Оценка влияния ликвидируемых шахт Восточного Донбасса на гидрохимический состав малых рек бассейна Северского Донца // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2010. № 3. С. 84 – 87.
4. Закруткин В.Е., Иваник В.М., Гибков Е.В. Состояние загрязненности воды рек Ростовской области в районах техногенного влияния ликвидируемых шахт Восточного Донбасса (реки бассейна Тузлова) // Современные фундаментальные проблемы гидрохимии и мониторинга качества поверхностных вод России : материалы науч.-практ. конф. с междунар. участием. Ч. 1. Ростов н/Д., 2009. С. 88 – 91.
5. Белоусова А.П., Гавич И.К., Лисенков А.Б., Попов Е.В. Экологическая гидрогеология. М., 2006. 397 с.
6. СанПиН 2.1.4.1074-01. Питьевая вода. Гигиенические требования к качеству воды централизованных систем питьевого водоснабжения. Контроль качества. М., 2002. 62 с.
7. Закруткин В. Е., Иваник В.М., Гибков Е.В. Эколого-географический анализ рисков реструктуризации угольной промышленности в Восточном Донбассе // Изв. РАН. Сер. географическая. 2010. № 5. С. 94 – 102.
8. Закруткин В.Е., Скляр Г.Ю., Гибков Е.В. Особенности химического состава и степень загрязненности подземных вод углепромышленных районов Восточного Донбасса // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2014. № 4. С. 73 – 77.



9. Никаноров А.М., Страдомская А.Г., Иваник В.М. Локальный мониторинг загрязнения водных объектов в районах высоких техногенных воздействий топливно-энергетического комплекса. СПб., 2002. 156 с.

10. Мохов А.В., Журбицкий Б.И., Карасев Г.К., Дымна А.И. Влияние угольного комплекса на геоэкологическую ситуацию // Проблемы и перспективы комплексного освоения минеральных ресурсов Восточного Донбасса. Ростов н/Д., 2005. С. 129 – 138.

11. Экологический мониторинг ликвидации неперспективных шахт Восточного Донбасса / под ред. В.М. Еремеева. Шахты, 2001. 182 с.

#### References

1. Vernadskii V.I. *Istoriya prirodnikh vod* [History of natural waters]. Moscow, 2003, 751 p.

2. Nikanorov A.M. *Gidrokimiya* [Hydrochemistry]. Textbook. Rostov-on-Don, 2008, 461 p.

3. Zakrutkin V.E., Ivanik V.M., Gibkov E.V., Sklyarov V.V. Otsenka vliyaniya likvidiruemykh shakht Vostochnogo Donbassa na gidrokhimicheskii sostav mal'nykh rek basseina Severskogo Donetsa [Assessing the impact of liquidating the Eastern Donbass mines on the hydrochemical composition of the low river basin of the Seversky Donets]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2010, no 3, pp. 84-87.

4. Zakrutkin V.E., Ivanik V.M., Gibkov E.V. [State water pollution of the rivers of the Rostov region in the areas of technogenic influence of liquidated mines of East Donbass (Tuzlov basin)]. *Sovremennye fundamental'nye problemy gidrokhimii i monitoringa kachestva poverkhnostnykh vod Rossii* [Modern fundamental problems of hydrochemistry and monitoring the quality of surface waters of Russia]. Materials of scient.-pract. conf. with int. participation. Ch. 1. Rostov-on-Don, 2009, pp. 88-91.

5. Belousova A.P., Gavich I.K., Lisenkov A.B., Popov E.V. *Ekologicheskaya gidrogeologiya* [Environmental hydrogeology]. Moscow, 2006, 397 p.

6. *Pit'evaya voda. Gigienicheskie trebovaniya k kachestvu vody tsentralizovannykh sistem pit'evogo vodosnabzheniya. Kontrol' kachestva* [Drinking water. Hygienic requirements for water quality of centralized drinking water supply systems. Quality control]. SanPiN 2.1.4.1074-01. Moscow, 2002, 62 p.

7. Zakrutkin V. E., Ivanik V.M., Gibkov E.V. *Ekologo-geograficheskii analiz riskov restrukturizatsii ugol'noi promyshlennosti v Vostochnom Donbasse* [Ecological and geographical analysis of the risk of restructuring the coal industry in the Eastern Donbass]. *Izv. RAN. Ser. geograficheskaya*, 2010, no 5, pp. 94-102.

8. Zakrutkin V.E., Sklyarenko G.Yu., Gibkov E.V. Osobennosti khimicheskogo sostava i stepen' zagryaznenosti podzemnykh vod uglepromyshlennykh raionov Vostochnogo Donbassa [Features of the chemical composition and the degree of contamination of groundwater coal-mining areas of the Eastern Donbass]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2014, no 4, pp. 73-77.

9. Nikanorov A.M., Stradomskaya A.G., Ivanik V.M. *Lokal'nyi monitoring zagryazneniya vodnykh ob"ektov v raionakh vysokikh tekhnogennykh vozdeistvii toplivno-energeticheskogo kompleksa* [Local monitoring water pollution in areas of high technological impacts of fuel and energy complex]. Saint Petersburg, 2002, 156 p.

10. Mokhov A.V., Zhurbitskii B.I., Karasev G.K., Dymna A.I. [Influence of coal complex on geoecological situation]. *Problemy i perspektivy kompleksnogo osvoeniya mineral'nykh resursov Vostochnogo Donbassa* [Problems and prospects of integrated development of mineral resources of the Eastern Donbass]. Rostov-on-Don, 2005, pp. 129-138.

11. *Ekologicheskii monitoring likvidatsii neperspektivnykh shakht Vostochnogo Donbassa* [Environmental monitoring liquidation of unpromising mines of East Donbass]. Ed. V.M. Eremeev. Shakhty, 2001, 182 p.

УДК 911.2: 556.51/54

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-100-104

## ГЕОМОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ДНИЩА ДОЛИНЫ Р. ТЕБЕРДЫ (СЕВЕРНЫЙ КАВКАЗ)

© 2016 г. П.А. Кипкеева, Ю.Я. Потапенко

Кипкеева Палистан Аубекировна – кандидат географических наук, доцент, кафедра физической и экономической географии, естественно-географический факультет, Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева, ул. Ленина, 29, г. Карачаевск, КЧР, 369202, e-mail: kipkeeva62@mail.ru

Kipkeeva Palistan Aubekirovna – Candidate of Geographical Science, Associate Professor, Department of Physical and Economic Geography, Natural and Geographical Faculty, Aliev Karachay-Cherkess State University, Lenin St., 29, Karachayevsk, KCR, 369202, Russia, e-mail: kipkeeva62@mail.ru

Потапенко Юрий Яковлевич – доктор геолого-минералогических наук, профессор, кафедра физической и экономической географии, естественно-географический факультет, Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева, ул. Ленина, 29, г. Карачаевск, КЧР, 369202, e-mail: nurotar@yandex.ru

Potapenko Yuriy Yakovlevich – Doctor of Geologic and Mineralogical Science, Professor, Department of Physical and Economic Geography, Natural and Geographical Faculty, Aliev Karachay-Cherkess State University, Lenin St., 29, Karachayevsk, KCR, 369202, Russia, e-mail: nurotar@yandex.ru

Проведены морфометрические исследования бассейна р. Теберды. Систематизированы линейные и площадные элементы земной поверхности с применением ГИС-технологий. Из линейных элементов основное внимание уделено тальвегам долин, для которых определены порядки по методу Р. Хортон. Установлены морфология и густота эрозионной сети. Зафиксированы площадные элементы днища долины, созданные гляциальными и флювиальными процессами. Днище долины включает три сегмента: собственно троговый с гляциофлювиалом, троговый преобразованный (террасированный) и аллювиальный эрозионно-аккумулятивный. Стадиальные террасы сопрягаются с конечными моренами отступивших долинных ледников.

**Ключевые слова:** речной бассейн, морфометрия эрозионной сети, трогои, днища долин, террасы.

Morphometric researches of the basin of the river Teberda are conducted. Linear and vulgar elements of a terrestrial surface with application of GIS-technologies are systematized. From linear elements the main attention is paid to thalwegs of valleys for which orders are determined by R. Horton's method. The morphology and density of an erosive network are established. The vulgar elements of the bottom of the valley created by glacial and fluvial processes are recorded. The bottom of the valley includes three segments: actually trough with glacial flyuvial, the trough transformed (terraced) and alluvial erosive and accumulative. Stadial terraces are interfaced to final moraines of the receded valley glaciers.

**Keywords:** river basin, morphometry of an erosive network, trough valleys, bottoms of valleys, terraces.

### Геолого-геоморфологическая позиция бассейна

Бассейн р. Теберды расположен на северном макросклоне Большого Кавказа к западу от меридиана горы Эльбрус. С юга бассейн ограничен Главным (Водораздельным) хребтом с высотами 3600–4046 м, с востока и запада – водоразделами с притоками р. Кубани. Субмеридиональное русло р. Теберды является консеквентным по отношению к субширотным морфоструктурам Большого Кавказа. С юга на север река пересекает три морфоструктуры: Главный хребет, Передовой хребет и Северо-Юрскую депрессию. Рельеф бассейна преимущественно высокогорный, севернее аула Нижняя Теберда – среднегорный.

### Изученность бассейна р. Теберды

Благодаря сооружению в середине XIX в. грунтовой дороги, а в середине XX в. – асфальти-

рованной трассы Кубань – Тебердинское пересечение северного макросклона Большого Кавказа стало наиболее доступным по сравнению с другими долинами. Это способствовало зарождению здесь горного туризма, альпинизма и курортного дела. В 1936 г. создается Тебердинский заповедник, включающий верховья реки к югу от притоков Джемагат и Муху. С тех пор сотрудники заповедника регулярно публикуют научные труды с описаниями компонентов природной среды.

На фоне детальной изученности литогенной основы и природных ландшафтов бассейна Теберды [1, 2] в тени остались днища долин, хотя именно на них размещены дороги, населенные пункты и рекреационные объекты. Выполненные исследования опирались на методики, суммированные в работах [3, 4].

### Морфология и морфометрия речной сети

Река Теберда образуется при слиянии истоков Аманауз и Гоначхир, впадает в р. Кубань в районе г. Карачаевска. Длина реки – 61 км. Истоки Гоначхир и Аманауз имеют при слиянии одинаковый (четвертый) порядок. В таком случае за главный принимается исток, имеющий наибольшую длину [5, 6]. Этому условию удовлетворяет р. Гоначхир с притоком р. Северный Клухор, вытекающим из Клухорского озера.

При прослеживании потока высшего порядка вверх по течению (по методу Р. Хортон) мы получаем в качестве истока Гоначхира р. Северный Клухор. В таком случае длина р. Теберды составит 85 км, что совпадает с вариантом П.М. Лурье с соавторами [7]. Площадь водосбора Теберды – 1080 км<sup>2</sup>, средняя высота водосбора – 2210 м [7]. Рисунок речной сети древовидный (рис. 1), средняя густота речной сети 0,6 км/км<sup>2</sup> с понижением до 0,45 в морфоструктуре Главного хребта.

### Морфологические особенности долин Теберды и Аманауза

От Домбайской поляны, где в р. Аманауз впадают Алибек и Домбай-Ельген, по направлению на северо-восток на протяжении 38 км долина имеет типичный троговый характер. Плейстоценовый долинный ледник заканчивался в районе р. Амгаты, левого притока Теберды, где в нижней части склона сохранились крупные валуны боковой морены. По морфогенетическим признакам днище долины делится на три сегмента.

Южный собственно троговый сегмент расположен между Домбайской поляной и курортом Теберда. Здесь днище трога заполнено ледниковыми грубообломочными отложениями – гляциофлювиалом (донная и боковые морены). В северной части курорта находится Кара-Кельская конечная морена.

Средний (преобразованный троговый) занимает отрезок долины от Кара-Кельской морены до левого притока р. Амгаты. Здесь ледниковые отложения испытали переработку речными потоками с образованием террас. Серия террас имеет верхнечетвертичный (Q<sub>3</sub>) и голоценовый (Q<sub>4</sub>) возраст. Особенностью состава аллювия является полное преобладание (свыше 90 %) горных пород Главного хребта (граниты, гнейсы, в меньшем количестве – кристаллические сланцы). И.С. Щукин предлагал по-

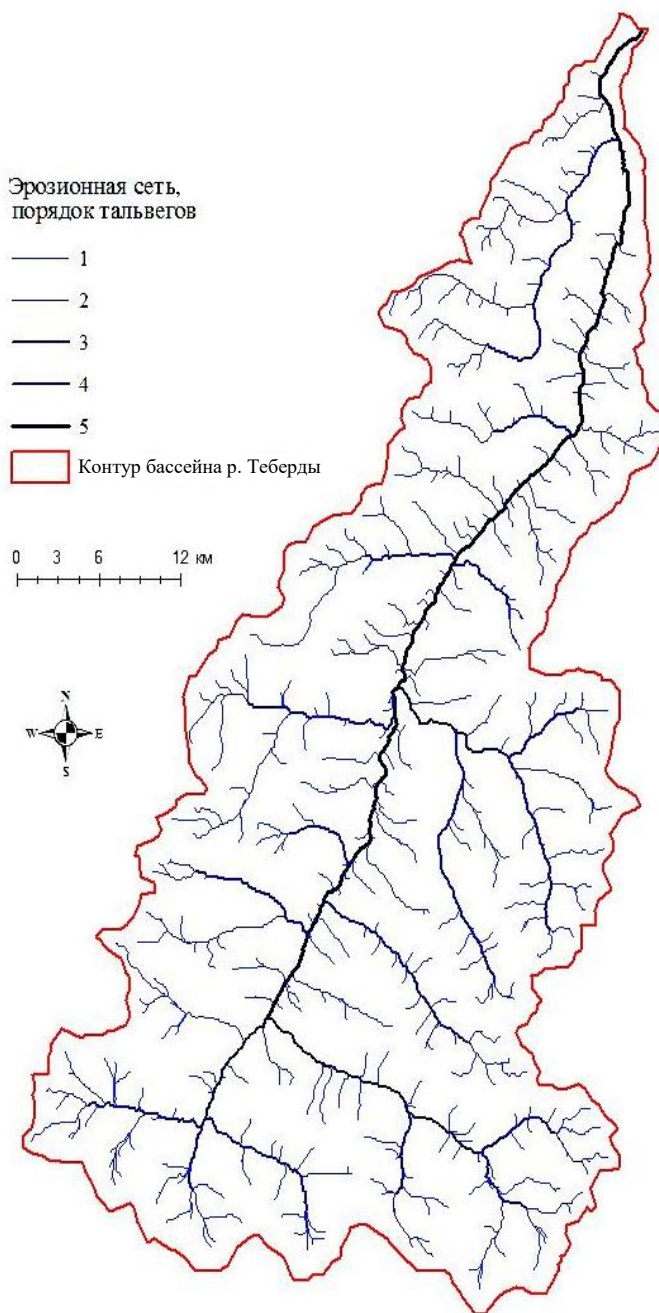


Рис. 1. Эрозионная сеть бассейна р. Теберды

добные днища трогов относить к категории преобразованных [5].

От притока Амгаты и до устья долина Теберды является типично эрозионной, местами с V-образным профилем. Надпойменные террасы развиты не повсеместно, а в расширениях долины.

Таким образом, днище долины р. Теберды состоит из трех отрезков: 1) верхнего трогового, vyplненного гляциофлювиалом; 2) среднего трогового, где гляциофлювиал преобразован в аллювиальные террасы; 3) нижнего эрозионно-аккумулятивного с серией разновозрастных террас.

Террасы изучались рядом исследователей начиная с 1920-х гг. В предложенных схемах число и возрастная датировка террас различаются. Наши полевые наблюдения [8] в целом подтверждают вариант А.В. Кожевникова [9]. По его схеме в районе курорта Теберда выражены одна голоценовая (4,5–6 м) и четыре верхнеплейстоценовые террасы: II – (8–10 м), III – (12–14,5 м), IV<sub>1-4</sub> – (17–60 м) и IV<sub>5</sub> – (45–70 м). В отличие от А.В. Кожевникова, мы выделяем две голоценовые террасы, первая из которых имеет высоту 1,5–2 м. Соответственно, номера более высоких террас возрастают на единицу, а терраса IV<sub>5</sub> приобретает номер VI (рис. 2). Все террасы считаются стадияльными, т.е. образовавшимися в определенные стадии похолодания (ледниковья) и межледниковья, во временном интервале 10–90 тыс. лет.

В разных сочетаниях они выражены и ниже по течению до устья Теберды. В г. Карачаевске, на водоразделе Теберды и Кубани, сохранилась сред-

неплейстоценовая высокая терраса (110 м), соответствующая рисскому межледниковью (примерно 130 тыс. лет).

Долина Теберды – одна из немногих в России (СССР), где делались попытки увязки аллювиальных террас с ледниковыми отложениями плейстоцена. Третья терраса (12 м) прослеживается до Кара-Кельской моренной гряды (абс. отм. 1323 м). Вторая терраса (5–6 м) фиксируется до устья р. Гоначхир, где расположены гоначхирские конечно-моренные гряды. Первая терраса прослежена по р. Аманауз до конечно-моренной гряды, окаймляющей снизу Домбайскую поляну.

Кара-Кельское оледенение сопоставляется с вюрмом Альп. В межледниковье, предшествовавшее Кара-Кельскому оледенению, была эпоха значительного отступления ледников и потепления климата, о чем свидетельствуют пыльцевые анализы, указывающие на существование здесь флоры, более теплолюбивой, чем сейчас [10].

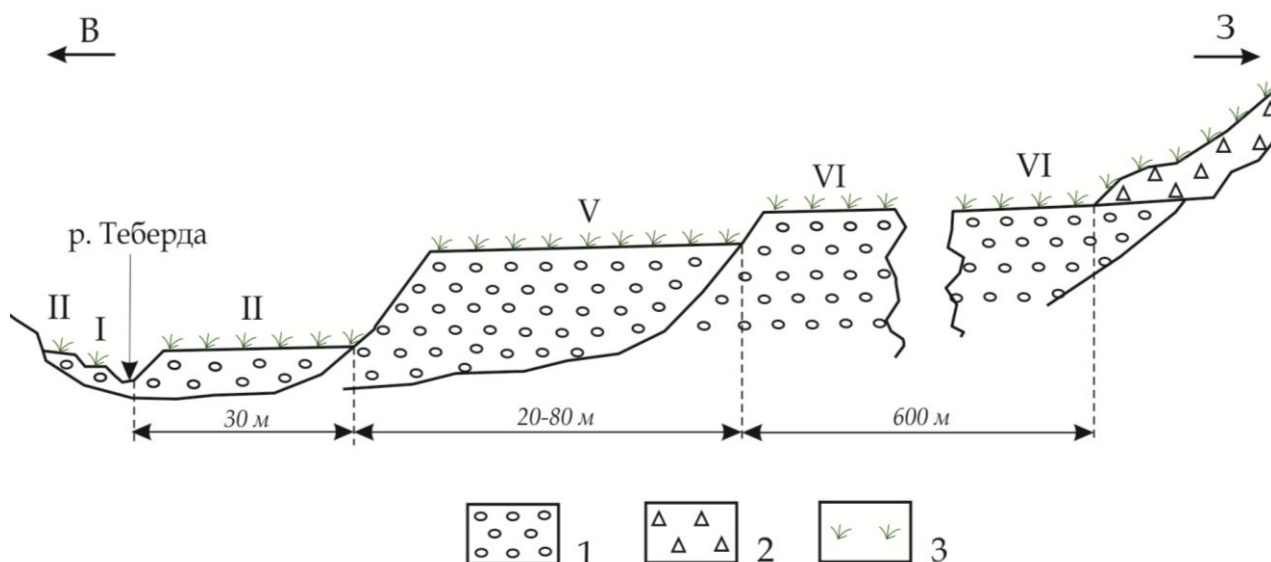


Рис. 2. Поперечный профиль террас левого борта троговой долины р. Теберды в 150 м к югу от окраины а. Верхняя Теберда: 1 – аллювий; 2 – коллювий; 3 – травяной покров

«Бараний лоб». На левобережье Теберды, в 4,3 км к северу от устья р. Муху, есть, по видимому, единственный для аллювиального рельефа троговых долин бассейна Кубани реликт ледникового рельефа (рис. 3). В приустьевой части крупной балки, берущей начало между вершинами Ачхиштарабаша (2829 м) и Лысая (2681 м), располагается широкая пологонаклонная на восток поверхность террасы, покрытая разнотравьем остепненного луга. На этой поверхности в 100 м к западу от шоссе выступает холмообразная морфоскульптура (рис. 3). Её размеры в плане 90×60 м, относительная высота – более 8 м, абсолютная

отметка – 1305 м. Южный склон холма крутой, а северный – пологий. Морфоскульптура сложена сланцеватыми вулканическими породами допозднепалеозойской кольтюбинской серии. Азимут падения 140°, угол падения 30°. На поверхности коренных пород наблюдается несколько округлых валунов (до 1–1,5 м) гранитов и пегматитов, принесенных ледником из морфоструктуры Главного хребта. По совокупности наблюдаемых признаков – это типичный «бараний лоб», выступ коренного ложа в пределах днища трога (рис. 3). Ограниченно развит коллювий из обломков пород кольтюбинской серии.

Таким образом, в долине Теберды имеется набор субгоризонтальных площадок возрастом от 10 до 90 тыс. лет, а в Карачаевске – площадка с возрастом не менее 130 тыс. лет. Поверхность «бараньего лба»,

находящегося в 1,75 км южнее а. Верхняя Теберда, освободилась от ледяного покрова около 100 тыс. лет назад. Ещё более древними являются поверхности склонов, сложенные коренными породами.

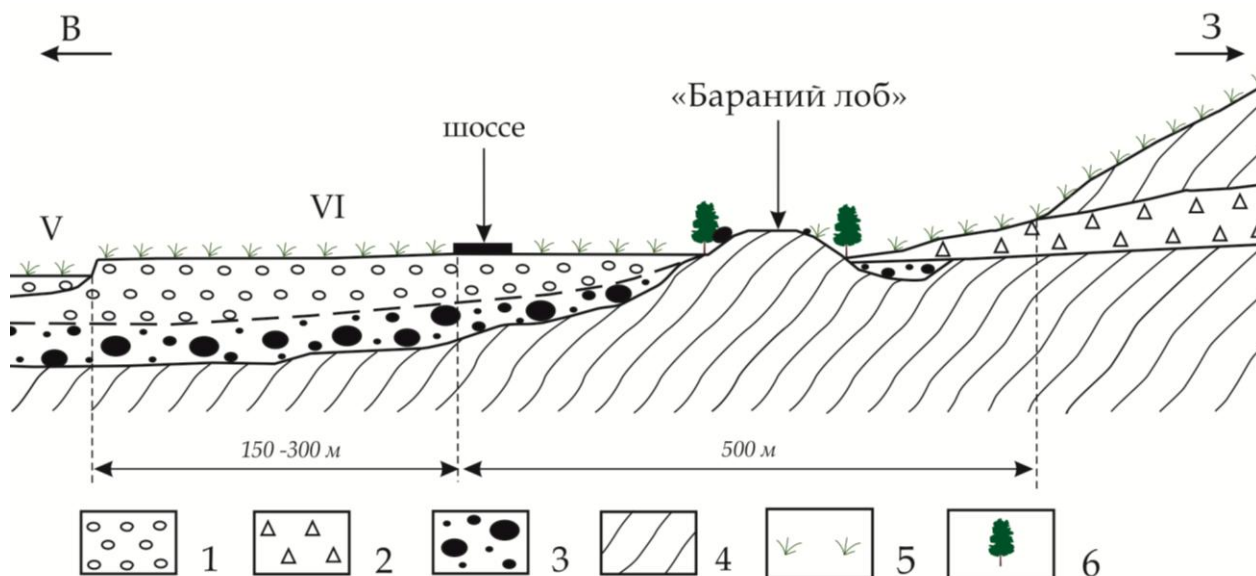


Рис. 3. Поперечный профиль долины р. Теберды в районе «бараньего лба» в 2 км севернее р. Муху:

1 – аллювий; 2 – пролювий; 3 – донная морена; 4 – метаморфические породы среднего палеозоя (тебердинская свита, Pz); 5 – травяной покров; 6 – лиственные деревья

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Морфометрический анализ речной сети позволяет считать р. Гоначхир главным истоком бассейна Теберды.

2. Морфология эрозионной сети древовидная, порядок тальвегов варьирует от 1 до 5, густота речной сети 0,6–0,45 км/км<sup>2</sup>.

3. Днище бассейна Теберды состоит из трех сегментов: верхнего, сложенного гляциофлювиалом; среднего, где гляциофлювиал переработан в аллювий; и нижнего собственно эрозионно-аккумулятивного с серией разновозрастных аллювиальных террас.

#### Литература

1. Исаченко А.Г. Ландшафтоведение и физико-географическое районирование. М., 1991. 366 с.

2. Шальнев В.А., Лагун С.Г., Нефедова М.В., Николаев Д.А. Ландшафты Тебердинского заповедника // Тр. Тебердинского государственного природного биосферного заповедника. Вып. 48. Кисловодск, 2009. 176 с.

3. Казанский Б.А. Количественная характеристика структуры речных систем // Тр. ДВНИГМИ. Л., 1976. Вып. 54. С. 62 – 68.

4. Ласточкин А.Н. Морфометрические исследования в геоморфологии. 1. Классификация морфометрических построений и характеристик // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 7 : Геология, география. 1988. Вып. 3, № 11. С. 37 – 50.

5. Шукин И.С. Общая геоморфология. М., 1960. Т. 1. 615 с.; 1964. Т. 2. 564 с.; 1974. Т. 3. 382 с.

6. Райс Р. Дж. Основы геоморфологии : пер с англ. М., 1980. 574 с.

7. Лурье П.М., Панов В.Д., Ткаченко Ю.Ю. Река Кубань. Гидрография и режим стока. Ростов н/Д., 2005. 498 с.

8. Потапенко Ю.Я., Кипкеева П.А., Курумбаев И.Р. Результаты геоэкологического обследования долины р. Теберда // Ландшафтно-рекреационный потенциал Карачаево-Черкесии : материалы XII науч.-практ. конф. 27 ноября 2015 г. Карачаевск, 2015. С. 38 – 44.

9. Кожевников А.В. Верхнеплиоценовые и четвертичные отложения долины р. Кубань // Геология Центрального и Западного Кавказа : тр. Кавказской экспедиции ВАГТ и МГУ за 1959 – 1960 годы. Т. 3. М., 1962. С. 162 – 187.

10. Тушинский Г.К. Современное и древнее оледенение Тебердинского района // Победенные вершины (ежегодник советского альпинизма). М., 1949. С. 263 – 297.

## References

1. Isachenko A.G. *Landshaftovedenie i fiziko-geograficheskoe raionirovanie* [Maintenance of landscapes and physical-geographical regionalization]. Moscow, 1991, 366 p.
2. Shal'nev V.A., Lagun S.G., Nefedova M.V., Nikolaev D.A. [Teberda Reserve Landscapes]. *Tr. Teberdinskogo gosudarstvennogo prirodnogo biosfernogo zapovednika* [Proceedings of the Teberda State Nature Biosphere Reserve]. Vol. 48. Kislovodsk, 2009, 176 p.
3. Kazanskii B.A. [Quantitative characterization of the structure of river systems]. *Tr. DVNIGMI* [Proc. FERHRI]. Leningrad, 1976, vol. 54, pp. 62-68.
4. Lastochkin A.N. Morfometricheskie issledovaniya v geomorfologii. 1. Klassifikatsiya morfometricheskikh postroenii i kharakteristik [The morphometric studies in geomorphology. 1. Classification of constructions and morphometric characteristics]. *Vestn. Leningr. un-ta. Ser. 7: Geologiya, geografiya*, 1988, vol. 3, no 11, pp. 37-50.
5. Shchukin I.S. *Obshchaya geomorfologiya* [General geomorphology]. Moscow, 1960, vol. 1, 615 p.; 1964, vol. 2, 564 p.; 1974, vol. 3, 382 p.
6. Rais R. Dzh. *Osnovy geomorfologii* [Fundamentals of geomorphology]. Transl. from English. Moscow, 1980, 574 p.
7. Lur'e P.M., Panov V.D., Tkachenko Yu.Yu. *Reka Kuban'. Gidrografiya i rezhim stoka* [Kuban River. Hydrography and flow regime]. Rostov-on-Don, 2005, 498 p.
8. Potapenko Yu.Ya., Kipkeeva P.A., Kurumbaev I.R. [The results of geo-environmental survey River Teberda valley]. *Landshafino-rekreacionnyi potentsial Karachaevo-Cherkessii* [Landscape-recreational potential of Karachay-Cherkessia]. Proceedings XII scient.-pract. conf. November 27, 2015. Karachaevsk, 2015, pp. 38-44.
9. Kozhevnikov A.V. [Upper pliocene and quaternary sediments of the Kuban valley]. *Geologiya Tsentral'nogo i Zapadnogo Kavkaza* [Geology of the Central and Western Caucasus]. Caucasian expedition VAGT works and the Moscow State University for the 1959 - 1960 years. Vol. 3. Moscow, 1962, pp. 162-187.
10. Tushinskii G.K. [Modern and ancient Teberda District glaciation]. *Pobezhdennye vershiny (ezhegodnik sovetskogo al'pinizma)* [Defeated tops (Yearbook of the Soviet mountaineering)]. Moscow, 1949, pp. 263-297.



---

**НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ**

---

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-105-105

**XI ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И БИОМЕХАНИКА  
В СОВРЕМЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ»**

В конце мая 2016 г. состоялась Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете», причем в этом году интерес был особенным. Поставлен рекорд по количеству принятых докладов.

Школа проходила в живописном месте на берегу Черного моря, в с. Дивноморском (недалеко от Геленджика), на территории спортивно-оздоровительного лагеря ДГТУ «Радуга». Традиционно в работе принимали участие как студенты, магистранты, аспиранты, молодые ученые, так и широко известные в научном мире исследователи. Доклады представили ученые Москвы, Санкт-Петербурга, Ростова-на-Дону, Брянска, Владикавказа, Краснодара, Нижнего Новгорода, Новочеркасска, Саратова, Симферополя, Таганрога, Висбадена, Жешува, Донецка, Еревана, Минска, Риги, Харькова.

Несмотря на множество отвлекающих факторов (море, солнце, пляж и практически летняя, хотя и прохладная, погода), зал всегда был полон, на заседаниях традиционно был аншлаг. Участники школы-семинара с интересом слушали доклады, задавали вопросы и активно участвовали в обсуждении. Программу конференции открыла пленарная лекция С.М. Бауэр и Е.Б. Воронковой, посвященная математическим моделям тканей глаза и новым задачам для них. Была изложена история моделирования глазных тканей; обсуждались различные классы задач для моделей пластин и оболочек, активно применяющихся для моделирования и позволяющих не только способствовать его совершенствованию и развитию диагностики, но и разрабатывать оптимальные стратегии проведения офтальмологических операций.

В первый день состоялись и пленарные доклады, посвященные различным аспектам математического моделирования: ростовым деформациям биологических тканей и оценке их свойств по данным акустического зондирования и индентирования, проблемам разрушения графена и деформирования слоистых композитов, тонким вопросам исследования бифуркаций теплопроводной жидкости.

В дальнейшем формы научных сообщений были самые разные – секционные и стендовые доклады; секция молодых учёных; круглый стол, посвящен-

ный проблемам образования. Активно обсуждались проблемы математического моделирования в различных разделах естествознания и техники. Здесь отметим задачи моделирования деформации неоднородных и анизотропных упругих материалов, экспериментальные исследования по деформированию термоупругих материалов, оптимизации конструкций из пьезоактивных материалов, задачи дефектометрии. Однако основное направление – модели биомеханики, методы расчета биомеханических конструкций, гемодинамика и задачи моделирования процесса образования бляшек, способы определения свойств различных биологических тканей, рекомендации по оптимизации операций.

В рамках проблем биомеханики тканей были широко представлены доклады, посвященные как экспериментальным исследованиям, так и фундаментальным проблемам моделирования в биомеханике. Особое внимание привлекли доклады, посвященные созданию и модификации моделей биомеханики, обработке экспериментов, приложениям в биомеханике спорта. Отрадно, что помимо научных работников, занимающихся моделированием в области механики и биомеханики, в работе школы приняли участие практикующие врачи в области травматологии и ортопедии.

Отметим достаточно высокий уровень докладов в номинации молодых ученых. Многие доклады были посвящены темам, из которых далее разовьются магистерские и кандидатские диссертационные исследования в перспективных направлениях развития науки.

Самое главное, что дала школа-семинар, – это обмен научными идеями, возможность обсудить результаты с коллегами из других регионов, возникновение и развитие новых научных связей, а еще и дружеские отношения, которые возникают между людьми разных вузов, городов, стран и далее продолжают на протяжении долгого времени.

Школа-семинар в Дивноморском – одно из многих регулярных научных мероприятий, на котором обсуждаются модели и методы биомеханики в России. Мы желаем ей успешной интересной работы и в будущем!

*А.О. Ватульян, М.И. Карякин*

---

## ОХРАНА ДОНСКОЙ ПРИРОДЫ. ФЕСТИВАЛИ «ВОСПЕТАЯ СТЕПЬ»

Наша страна богата разнообразием экосистем, природными ресурсами, красотой ландшафтов. В условиях ухудшения экологической ситуации остро стоят проблемы сохранения и рационального использования этих богатств. Одной из важнейших задач является формирование у населения природоохранных знаний и экологического мышления. У Ассоциации «Живая природа степи» (далее ассоциация) одно из основных направлений деятельности – знакомство жителей Дона и других регионов с красотой и богатством природы Ростовской области (далее РО), развитие у них бережного отношения к её ресурсам, экологическое образование и воспитание населения, активизация экотуризма. Ассоциация организует различные экологические акции для населения (слеты, семинары, лекции, конкурсы, викторины, выставки фотографий и картин природы Дона, выступления в СМИ, экскурсии и другие мероприятия) в различных структурах юга страны. Многие из них проводятся в естественных условиях степи в Манычском комплексе, объединяющем Центр редких животных европейских степей и полевого стационар ассоциации с редкими и ценными животными (лошадь Пржевальского, сайгак, бизон, олень Давида и т.д.), заповеднике «Ростовский», Манычском стационаре ЮНЦ РАН.

Для координации структур, занимающихся природоохранной деятельностью, обобщения этой деятельности и её анализа, развития экотуризма ассоциация в 2013 г. в Манычском комплексе, находящемся в Орловском районе РО, провела I экологический фестиваль «Воспетая степь». Его цель – обратить внимание на уязвимость степной флоры и фауны, повысить интерес к экологическому туризму, развить экологическое просвещение. Фестиваль заинтересовал и привлек внимание школьников, учителей, студентов, преподавателей, работников государственных, частных и общественных структур, любителей природы, выразивших желание регулярного проведения подобных фестивалей. В 2014 г. совместно с заповедником «Ростовский» прошли II и III фестивали «Воспетая степь», в 2015 г. с активным участием администрации области, прежде всего минприроды РО, состоялся IV фестиваль. С каждым годом увеличивались масштабность и количество участников. Если I фестиваль посетили около 300 человек, II – 500, III – 630, то IV – 3500 заявленных и более 1500 незаявленных человек.

На V фестивале «Воспетая степь» (16 апреля 2016 г., Манычская степь) присутствовали более 7 тысяч человек. Этот фестиваль, приуроченный к

массовому цветению тюльпанов, ирисов и других весенних цветов, стал уже традиционным праздником экологов юга страны. Его организаторы – ассоциация, заповедник «Ростовский» и минприроды РО. Активное участие приняли члены Общественной палаты РО, ДОСААФ РО и ЗС РО, МЧС РО, «Газпром» РО, ЗАО «"Аксинья" – Семикаракорская керамика») и другие организации. Нескончаемые вереницы автомашин, впервые наблюдаемые в этом районе автомобильные пробки, непрерывный поток людей свидетельствовали о популярности фестиваля. Путёвки бронировали заранее через турагентство. Некоторые организации выделили сотрудникам свой транспорт. Многие добирались самостоятельно семьями с детьми.

На фестивале собрались не только жители донского региона, но и гости из Волгоградской области, Краснодарского и Ставропольского краев, Москвы. Основной контингент участников составляли школьники, студенты, активные защитники донской природы разного возраста, сотрудники государственных и общественных структур. За порядком следила полиция, движение и размещение на стоянках автотранспорта регулировала автоинспекция, за здоровьем отвечали медицинские работники, питанием обеспечивали местные фермеры, а донскими сувенирами – их производители из различных районов Донской земли. Все события фестиваля освещались центральными и региональными СМИ.

На центральной площадке разместились сцена для выступающих с приветствиями и мероприятий культурной программы, а также ряды площадок отдельных коллективов и мастер-классов, где демонстрировались народные промыслы, проводились экологические акции и научно-просветительские мероприятия. Основная задача всех мероприятий – обратить внимание жителей юга и гостей на уязвимость степной природы, её растительный и животный мир, необходимость бережного к ним отношения, повысить роль экологического туризма. «Кто хоть раз видел диких донских мустангов на воле, безграничное море цветущих степных ирисов и тюльпанов, воспетое Чеховым Приазовье, забыть этого не может. Время, когда познание своей земли и истории дает дополнительный источник энергии и ярких эмоций, уже наступило», – сказал губернатор области Василий Голубев.

Свои коррективы внесла погода, что слегка расстроило организаторов праздника. Накануне открытия фестиваля пролил дождь. Однако осадки и мокрая трава не испугали туристов-экологов и ценителей степной красоты, для которых не бывает



плохой погоды. Многие запаслись плащами и сапогами. Участники выслушали приветствия организаторов фестиваля, гостей из Москвы, Элисты и других мест, активно аплодировали песням и танцам художественных коллективов области и соседних регионов, приветствовали авиашоу и спускающихся спортсменов-парашютистов, флешмоб юных экологов-эколят в защиту тюльпана Шренка – символа Манычской степи. На фестивале был дан старт инновационному проекту «Жизнь без отходов», а эколята Донского края рассказали о своих успехах, исполнили свой гимн. Достижения РО в сфере экологического образования не остались незамеченными на федеральном уровне. Сопредседатель Совета по сохранению природного наследия нации в Совете Федерации Владимир Зотов вручил области диплом о внесении достижений РО в сфере экологического образования и просвещения в Книгу рекордов России.

Центральная площадка фестиваля инфраструктурно и тематически в этом году по сравнению с прошлым годом увеличилась вдвое. Было представлено 100 тематических площадок и мастер-классов, что также вдвое больше, чем на фестивале 2015 г. Минприроды РО, Республика Калмыкия, ассоциация, заповедник «Ростовский», Волгодонская АЭС, Азовский музей-заповедник, музей-заповедник М.А.Шолохова, Азовский историко-археологический и палеонтологический музей-заповедник, Ростовский казачий округ «Казачки Дона», Ростовское художественное училище им. Грекова, различные государственные и общественные экологические организации развернули свои выставки. Площадки имели Орловский, Сальский, Пролетарский, Заветинский, Ремонтненский, Егорлыкский, Кагальницкий, Волгодонской и другие районы. В направлении «Наука и техника» свои экспонаты представили Южный федеральный университет, Донской государственный аграрный университет, Донской государственный технический университет, ЮНЦ РАН, Ростовская атомная станция. Представители учебных заведений вели профориентационную работу, направленную на повышение престижа специальностей экологической направленности. Изюминкой стали галерея донской природы, созданная по итогам соответствующего конкурса, и живопись Олега Майбороды – члена Союза художников России. Каждый участник фестиваля на площадках с мастер-классами смог здесь найти занятие по вкусу: научиться вышивке бисером, изучить особенности декупажа, освоить вышивку, пирографию, мыловарение, скорняжное мастерство и т.д. Работали творческие мастерские ремесленников, ярмарка экологически чистых продуктов.

По традиции фестиваль организовали в начале теплого периода, в одно из самых красивых времен года – период цветения весенних степных трав, кустарников, деревьев. С природой степи участники познакомились не только на основной площадке, но и в нескольких километрах от нее в районе пересыхающего летом и покрывающегося слоем блестящей на солнце соли озера Лопуховатое. Здесь уже не было места громким выступлениям, музыке, праздным, деловым и научным разговорам. Сюда участников привезли на автомашинах, и они по специально разработанным маршрутам небольшими группами в сопровождении экскурсоводов смогли пообщаться с живой природой, увидеть бескрайние просторы, любоваться и фотографировать массовое цветение тюльпанов, ирисов и других весенних растений, дышать душистым запахом весенней зелени и цветов, степным воздухом, слушать пение жаворонков и других птиц, шелест степной травы. Здесь главное правило – не рвать и не топтать краснокнижные цветы, не оставлять после себя мусор. Это правило для экологов было неновым, и они его соблюдали. Не было ни одного сорванного тюльпана.

Ежегодный фестиваль «Воспетая степь» открывает теплый период для экотуристов, защитников природы. С него начинаются многочисленные экскурсии в Манычский комплекс, ставший в последние годы на юге страны экологической «Меккой» для всех ценителей красоты и богатств естественной природы европейских степей. В выходные дни, во время каникул и отпусков, нередко в другое время сюда приезжают семьи, классы, студенческие группы, коллективы различных государственных и общественных структур, жители Дона, других регионов России и зарубежных стран. С объектами ассоциации и заповедника уже познакомились сотни тысяч людей, среди которых были члены правительства России и регионов, ведущие ученые, специалисты и СМИ международных и отечественных организаций, школьники и студенты, преподаватели вузов и многих других структур. Ежегодно их посещают десятки тысяч людей, и с каждым годом это количество возрастает, что значительно усложняет работу, но радует сотрудников минприроды, ассоциации, заповедника. Знакома население с естественной степью, они формируют у него знания не только о её богатстве, красоте, но и том, что природа является основой здоровья, благополучия людей, и её необходимо активно защищать от нашей разрушительной деятельности, сохранять, восстанавливать и разумно использовать.

*В.А. Миноранский*

## ФАРМАКОГЕНЕТИКА И ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННАЯ МЕДИЦИНА – ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПОДБОР ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ

19 марта 2016 г. в Ростове-на-Дону прошла первая конференция «Фармакогенетика и персонализированная медицина – индивидуальный подбор лекарственных средств», организованная Ассоциацией специалистов в области фармакологии, биологии и медицины при поддержке министерства здравоохранения Ростовской области, Южного федерального университета, Ростовского государственного медицинского университета и НАО «Наука».

Форум собрал отечественных исследователей, имеющих опыт в фармакогеномике. Среди них – специалисты по онкологии, гематологии, кардиологии, гинекологии. Работы участников форума по праву можно назвать пионерскими на пути становления отечественной фармакогенетики.

Заведующая кафедрой генетики Южного федерального университета профессор Т.П. Шкурат рассказала, что в первые десятилетия XXI в. достигнуты значительные успехи в анализе генома человека. За это время наше понимание в патогенезе многих болезней существенно изменилось. Новым профилактическим направлением молекулярной медицины стала предиктивная медицина, основные особенности которой – индивидуальный характер, так как геном каждого человека индивидуален, отсюда – «персонифицированная медицина» и профилактическая направленность. Анализ генома возможен на любой стадии онтогенеза, задолго до начала заболевания. Индивидуальный характер предиктивной медицины создал реальные условия для развития персонифицированного подхода к пациенту в плане как точной диагностики наследственных причин заболевания, так и его профилактики и лечения, исходя из индивидуальной переносимости лекарственных препаратов. Один ген может иметь до двух тысяч различных форм – аллельных состояний. И хотя каждый из нас обладает одним и тем же набором генов, мы отличаемся друг от друга примерно на три миллиона генетических вариаций. Таким образом, расшифровка аллельных вариантов генов, которые играют роль в процессах развития тех или иных болезней, оказывается невероятно перспективной задачей.

Достижения в геномике привели к пониманию механизмов образования опухолей, идентификация ассоциированных с опухолями мутаций – к разработке целевой противораковой терапии. Отечественные достижения в персонифицированной

онкологии представил руководитель отдела биологии опухолевого роста НИИ онкологии имени Н.Н. Петрова (Санкт-Петербург) профессор Е.Н. Имянитов. Он представил данные исследования препарата Iressa®. Для изучения его эффективности специалисты НИИ онкологии имени Н.Н. Петрова провели исследование полиморфизма гена эпидермального фактора роста *EGFR* у 500 больных. Необходимо было найти больных раком легкого с наличием мутации в гене *EGFR* и отсутствием предшествующей химиотерапии. Этим критериям отвечали 25 человек из 500. Казалось бы, не так много. Но результат работы превзошел ожидания. Всем 25 пациентам в качестве лечения был назначен препарат «Иресса», и положительный эффект был у каждого. Если положительный результат от воздействия традиционной химиотерапии наблюдается только у каждого пятого пациента, то в случае мутации в гене *EGFR* он гарантирован на 100 %. Согласно решениям Европейского медицинского агентства в ЕС, показанием к применению этого препарата при немелкоклеточном раке легкого является наличие в опухоли активирующих мутаций *EGFR* – Del19, L858R или других более редких мутаций (L861Q, G719X). Наличие мутаций в гене *EGFR* является почти стопроцентной гарантией положительного эффекта от лечения «Ирессой». Учеными НИИ онкологии было установлено, что наследственные раки молочной железы, вызванные дефектом гена *BRCA1*, обладают исключительно высокой химиочувствительностью к цисплатину. При этом оказалось, что *BRCA1*-ассоциированные опухоли невосприимчивы к общероссийскому «золотому стандарту» терапии раков груди – препаратам из группы таксанов.

Фармогеномика делает первые шаги и в лечении тромбозов. Об этом рассказал руководитель клинико-диагностического отдела Центра изучения тромбозов и аутоиммунных заболеваний Ярославского государственного медицинского университета Н.Ю. Левшин. Современная статистика печальна: 20 % артериальных тромбозов являются летальными и 40 % приводят к пожизненной нетрудоспособности. Контролировать действие антитромботических средств крайне сложно: даже при тщательном подборе дозировки у больного возможно развитие неблагоприятных реакций в виде кровотечений. Фармакогенетические исследования существенно повышают эффективность терапии

при тромбозах, улучшая точность дозирования и помогая определить факторы риска развития осложнений.

«Индивидуализация лечения нужна во всем. Любого рода "усреднения" приводят к удручающим результатам вплоть до летальных исходов», – считает профессор Уральского государственного медицинского университета, заместитель директора Клинического института мозга И.Н. Лейдерман (Екатеринбург). Он поделился опытом работы с пациентами в критических состояниях.

С.С. Амелина, профессор Ростовского государственного медицинского университета, рассказала об особенностях генотипа матери при привычном невынашивании беременности. Оказывается, анализ только материнского генотипа не является достаточно информативным для оценки ассоциации

полиморфизмов с риском развития патологии беременности первого триместра. Необходим анализ генотипа не только матери, но и отца, что позволяет оценить риск проявлений осложнений развития у зародыша. Профессор кафедры генетики Южного федерального университета Е.В. Машкина рассказала о раннем прогнозировании атеросклероза на основе генотипа пациента.

Разработка методов лечения и диагностики на основе генотипа больного составляет предмет нового бурно развивающегося направления молекулярной медицины. Подводя итог, можно сказать, что в течение ближайших десятилетий практической медицине предстоит пройти сложный путь от идентификации генов до выработки эффективной индивидуальной терапии, но это самая эффективная дорога.

*Т.П. Шкурат*

## НАШИ ЮБИЛЯРЫ

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-110-112

### ТАЛАНТЛИВЫЙ УЧЕНЫЙ, ПРОСВЕТИТЕЛЬ, НАСТАВНИК

*(к юбилею В.А. Бабешко)*

Академик РАН Владимир Андреевич Бабешко, известный российский ученый-механик, 30 мая 2016 г. встретил своё 75-летие. Уроженец ст. Новотитаровской Динского района Краснодарского края, он окончил с отличием в 1964 г. физико-математический факультет Ростовского государственного университета по специальности «механика». Продолжив образование в аспирантуре на кафедре теории упругости, в 1966 г. под руководством проф. И.И. Воровича досрочно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы решения контактных задач теории упругости для слоя». Далее – преподавательская работа на родной кафедре. В 1971 г. В.А. Бабешко становится заместителем директора по научной работе НИИ механики и прикладной математики РГУ. Научная деятельность того периода связана с развитием метода факторизации функций и матриц-функций применительно к сложным динамическим задачам теории упругости для полугограниченных тел, за что в 1973 г. была присуждена премия Ленинского комсомола в области науки; через год Владимир Андреевич успешно защитил докторскую диссертацию на тему «Метод факторизации в статических и динамических задачах теории упругости».

Много сил отдавая развитию института, становлению отдела волновых процессов, преподавательской работе на кафедре, Владимир Андреевич активно занимался научной деятельностью, что нашло отражение в подготовке монографий, посвященных различным аспектам постановки и методам решения динамических смешанных задач теории упругости. Тогда же Владимир Андреевич заложил основы своей научной школы, из которой вышло немало кандидатов и докторов наук, преподавателей, научных сотрудников, сформировавших свои научные направления.

Став во главе Кубанского государственного университета в 1982 г., за 26 лет своего ректорства В.А. Бабешко сделал его одним из самых динамично развивающихся вузов в южном регионе России. Продолжалась интенсивная научная деятельность Владимира Андреевича: издавались монографии, посвященные развитию метода факторизации применительно к анализу волновых процессов в упру-

гих телах, публиковались статьи, апробировались новые идеи и методы.

Около 35 лет (с 1982 г. по настоящее время) В.А. Бабешко является заведующим кафедрой математического моделирования КубГУ, а с 1994 г. – директором Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф. Будучи вице-президентом Союза ректоров России, членом ВАК, он, имея значительный вес в научном сообществе, влияет на процессы развития образования и науки в России.

Научные исследования В.А. Бабешко по достоинству оценены: в 1987 г. он был избран чл.-корр. АН СССР, в 1997 г. – действительным членом РАН. В 2002 г. Владимир Андреевич стал лауреатом Государственной премии в области науки и техники. С 2000 по 2008 г. он избирался членом Президиума РАН, с 2004 г. – заместитель председателя Южного научного центра РАН.

Крупный ученый в области механики сплошной среды Владимир Андреевич Бабешко основное направление своих исследований связал с теорией динамических процессов в упругих телах и их приложениями в различных областях знания. Для анализа закономерностей формирования волновых полей в полугограниченных структурах-волноводах он использовал значительную часть арсенала методов современной математической физики, создал новые методы для исследования новых классов задач. Результаты этих работ нашли приложение в геофизике, вибросейсморазведке, акустике, сейсмологии, геоэкологии, дефектоскопии, фундаменто- и машиностроении, акустоэлектронике. К наиболее исследованным относятся смешанные динамические задачи теории упругости. Модели слоя и бесконечного цилиндра, весьма популярные при исследовании статических контактных задач, оказались полезными и при исследовании закономерностей формирования полей упругих волн. Отметим, что традиционный для математической физики подход, основанный на сведении смешанных краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям с последующим обращением главной части и сведением к уравнениям Фредгольма 2-го рода, оказался малоэффективным для динамических контактных задач в силу значительной осцилляции

ядер при высоких частотах колебаний. В.А. Бабешко развил известные методы решения интегральных уравнений и систем с разностными ядрами, внёс существенный вклад в основы классического метода Винера – Хопфа, в развитие метода факторизации матриц-функций. Анализируя методы построения решений, он предложил ряд новых эффективных методов для решения смешанных динамических задач: обобщенной факторизации и фиктивного поглощения, которые с успехом использовались его учениками для решения других классов задач теории упругости, электроупругости, термоупругости, в иных разделах математической физики. Метод фиктивного поглощения позволил преодолеть трудности решения интегральных уравнений с осциллирующими ядрами; удалось свести интегральные уравнения динамических контактных задач к решению интегральных уравнений с неосциллирующими ядрами, типичных для статики, и к конечным алгебраическим системам, что упростило процедуру построения решения и дало ясную физическую интерпретацию волновым полям, распространяющимся от источника колебаний.

Значительный вклад В.А. Бабешко внёс в разработку новых подходов к исследованию динамических задач для слоистых структур с неровной границей и тел конечных размеров. Им предложен новый способ построения граничных интегральных уравнений в математической физике, опирающийся не на фундаментальные и сингулярные решения и теоремы теории потенциала, приводящие к классическим сингулярным интегральным уравнениям, а на анализ характеристического многочлена оператора теории упругости, приводящий к интегральным уравнениям 1-го рода с гладкими ядрами. Этот подход оказался эффективным и для других классов операторов с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами.

Благодаря детальному анализу интегральных уравнений, описывающих волновые поля в слоистых средах, В.А. Бабешко сформулировал так называемые условия статичности, которые стали теоретической базой создания направленного акустического излучения. Эти результаты весьма важны в различных прикладных областях: сейсмологии, радиоэлектронике, вибросейсморазведке, механике разрушения. Он теоретически обосновал возможность зондирования заглубленных объектов, что актуально не только в вибросейсморазведке и дефектоскопии, но в целом для понимания особенностей постановки и решения многих, в том числе и обратных, задач по реконструкции свойств объектов, недоступных для непосредственного наблюдения.

На основе созданной теории волновых процессов в неограниченных средах с неоднородностями В.А. Бабешко совместно с академиками РАН

И.И. Воровичем и И.Ф. Образцовым зарегистрировал научное открытие (1994) и предсказал явление высокочастотного резонанса. Суть этого состоит в следующем. Установлено, что при некоторых сочетаниях неоднородностей, расположенных в параллельных плоскостях (плоских трещин и тонких включений), и для определенных соотношений их размеров и частот волновой процесс может оказаться локализованным в зоне некоторой неоднородности. Получены общие условия локализации волнового процесса для совокупностей различных типов неоднородностей. Это открытие стало фундаментом создания новых принципов дефектометрии и принципов вибрационного воздействия на глубоко расположенные участки Земли, зоны сейсмической активности для их разгрузки и снятия концентрации напряжений, что позволило не только развить основы мониторинга, но и достичь снижения уровня сейсмоопасности. Исследование локализации вибрационных потоков в окрестности плоских неоднородностей и ясное понимание закономерностей их взаимодействия привело В.А. Бабешко к созданию основ новой теории, теории вибросопротивности.

За время своей плодотворной научной деятельности Владимиру Андреевичу довелось руководить коллективами, которые занимались прикладными задачами фундаментостроения, дефектоскопии, сейсмологии и акустоэлектроники. Идеи и методы, сформированные им в рамках динамической теории упругости, были использованы, например, при исследованиях в области анализа и синтеза устройств с многоэлектродными покрытиями на поверхностных акустических волнах. Практические проблемы региона привлекли внимание В.А. Бабешко к задачам экологии и геоэкологии, в том числе к вопросу изучения прочности промышленных сооружений и хранилищ отходов вредных веществ, предотвращения загрязнений при техногенных авариях и катастрофах, экологического мониторинга воздушных и водных потоков.

Владимир Андреевич Бабешко – автор ряда новых научных направлений. Так, для многомерных систем дифференциальных уравнений в частных производных им разработан дифференциальный метод двойной факторизации, позволяющий исследовать широкий круг задач математической физики, механики деформируемого твердого тела, физики, гидромеханики, геоэкологии и т.д.

Академик В.А. Бабешко много внимания уделяет подготовке новых кадров. В разных областях (на педагогическом поприще, в структурах Академии наук) его ученики достойно продолжают и развивают не только созданные им, но и собственные научные направления, укрепляя традиции южно-российской школы механиков в России и в мире.

Вся жизнь Владимира Андреевича – образец служения Родине и обществу, российской и мировой науке – отмечена высокими правительственными наградами. В их числе – ордена «Знак почета» (1981) и «Дружба народов» (1986), орден Почета за заслуги в области образования, науки и большой вклад в подготовку квалифицированных специалистов (2006), орден им. А.С. Макаренко (2008). В.А. Бабешко – заслуженный деятель науки России, Кубани, Адыгеи; награжден почетным знаком Международного гуманитарного фонда «Знание» им. С.И. Вавилова (2000), медалями «Герой труда Кубани» (2003), «40 лет полета Ю.А. Гагарина»

(2001), АН ВШ России «За заслуги перед высшей школой» (2001), «За просветительскую деятельность на благо России имени Екатерины II» (2006), ведомственными наградами.

Обаяние и широта эрудиции, простота в общении, забота и внимание к людям, доброжелательность, отзывчивость и тактичность, истинная демократичность всегда привлекали к Владимиру Андреевичу симпатии коллег и учеников. От всей души они желают ему крепкого здоровья, удачи и радости в жизни, долгих лет научного творчества, развития научной школы.

*А.О. Ватульян, О.Д. Пряхина*

*Редколлегия серии «Естественные науки», а также коллектив редакции поздравляют с юбилеем члена редсовета журнала Владимира Андреевича Бабешко и желают ему крепкого здоровья, благополучия, творческих успехов, талантливых учеников и учениц!*

## ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

DOI 10.18522/0321-3005-2016-2-113-116

### ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕ

*(памяти В.И. Юдовича)*

Моя первая встреча с Виктором Иосифовичем Юдовичем произошла на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Москве в 1964 г. Я только что защитил кандидатскую диссертацию. Однако настоящее знакомство произошло двумя годами позже. Никита Николаевич Моисеев, который лет за девять до этого переехал из Ростова в Москву, организовал в здании Вычислительного центра АН СССР семинар по теории гидродинамической устойчивости и турбулентности. Виктор Иосифович, имея к тому времени глубокие результаты по теории устойчивости, на равных дискутировал с мэтрами. Прошло десять лет, и его имя встало в один ряд с ведущими мировыми специалистами в этой области науки.

В 1972 г., в возрасте 38 лет, Виктор Иосифович защитил докторскую диссертацию «Математические вопросы теории устойчивости течений жидкости» в совете Института проблем механики, возглавляемом академиком А.Ю. Ишлинским (теперь это Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН). Кандидатская диссертация «Исследование уравнений двумерного течения идеальной несжимаемой жидкости» была защищена в 1962 г. в МГУ им. М.В. Ломоносова. А в промежутке были выполнены работы по функциональному анализу, электростатике, теории пластин и оболочек. На одной из них [1] я хотел бы остановиться подробнее.

В этой работе [2] изучена нелинейная осесимметричная задача равновесия пластины, которая сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. В одном из них имеется малый параметр при старшей производной, пропорциональный толщине пластины. Устремляя этот параметр к нулю, приходим к уравнению равновесия мембраны. Однако мембранное решение не позволяет удовлетворить естественным краевым условиям, в частности условию жесткого защемления пластины. Для того чтобы им удовлетворить, строится приближенное решение задачи, содержащее функции типа пограничного слоя.

Хотя формальная асимптотика решения задачи была известна, вопрос ее обоснования длительное время оставался открытым. Виктор Иосифович предложил для этой цели использовать метод Ньютона – Канторовича. Основной трудностью в его

применении является оценка нормы обратного оператора к производной Фреше, вычисленной на асимптотическом решении операторного уравнения. Виктор Иосифович заметил, что при стремлении малого параметра к нулю норма растет как фиксированная отрицательная степень параметра. В то же время порядок невязки при подстановке приближенного решения в уравнение оценивается величиной, имеющей степенное убывание по малому параметру. Эта степень может быть сделана сколь угодно большой, если продвинуться достаточно далеко в построении асимптотики. В итоге мы попадаем в условия действия теоремы Канторовича о сходимости метода Ньютона, что и дает обоснование сходимости приближенного решения к точному.

В [1] проявилась замечательная способность В.И. Юдовича видеть общее в частностях. Предложенная авторами схема обоснования асимптотики решения сингулярно возмущенных уравнений была использована в другой работе, посвященной асимптотическому интегрированию уравнения равновесия капиллярной жидкости в поле тяжести. Впоследствии сфера ее применения была распространена не только на эллиптические, но и на параболические задачи с малым параметром при старшей производной.

Приведу еще один пример, который показывает умение Виктора Иосифовича выявить математическую сущность явления, обнаруженного в конкретной ситуации, и построить на этой основе новую теорию. В 1975 г. была опубликована статья Д.В. Любимова [2] о конвективном течении в пористой среде, подогреваемой снизу. Автор обнаружил, что в задаче о фильтрационной конвекции потеря устойчивости равновесия ведет к рождению однопараметрического семейства стационарных решений, и каждое из них устойчиво относительно малых возмущений. Однако это явление не вкладывалось в существующие понятия этой теории. В частности, обнаруженное им семейство равновесий не было орбитой действия какой-либо группы симметрий в задаче фильтрационной конвекции. Эксперимент подтвердил наличие множества стационарных движений вблизи порога устойчивости основного состояния жидкости.

В.И. Юдовичем [3] была вскрыта математическая природа появления цикла равновесий в задаче, рассмотренной Д.В. Любимовым, и заложены основы теории косимметрии, получившей дальнейшее развитие в работах самого В.И. Юдовича и его учеников.

Понятие косимметрии естественным образом обобщается на случай динамических систем, а также обыкновенных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Наличие у динамической системы симметрии или косимметрии порождает существование ее непрерывных семейств равновесий. Если динамическая система имеет интегралы, то косимметриями являются их дифференциалы. Такие голономные косимметрии хорошо известны.

Свойство, которое объединяет два семейства равновесий, состоит в бесконечной коразмерности вырождения соответствующих линеаризованных операторов. Однако причины неединственности равновесий в системах с симметрией и косимметрией различны: наличие симметрии говорит о скрытой переопределенности системы, тогда как наличие косимметрии свидетельствует о ее скрытой недоопределенности. Наглядное представление данной ситуации дают теорема о неявной функции для косимметрических уравнений и ее обращение [4, 5].

Алгоритмических способов отыскания нетривиальных косимметрий пока не найдено. Но если свойство косимметрии обнаружено, оно дает много полезной информации о поведении динамической системы. К настоящему времени построен целый ряд примеров как диссипативных, так и консервативных систем, обладающих косимметриями (модель фазовых переходов в антиферромагнетиках [6], системы классической механики с симметричной потенциальной энергией [6], конвекция магнитной и многокомпонентной жидкости в пористой среде [7], внутренние волны в двухслойной жидкости, динамическая модель взаимодействия трех популяций).

Для научного творчества Виктора Иосифовича характерен подход к классическим проблемам механики с позиций современной математики. Ярким примером служит его работа [8]. Со времен Бенара и Рэлея известно, что в достаточно протяженном жидком горизонтальном слое со свободной границей при подогреве снизу возникает ячеистая структура, напоминающая пчелиные соты. Если верхняя граница является твердой стенкой, то вторичные течения проявляются в форме конвективных валов. Эффективное вычисление вторичных течений проводится с помощью метода Ляпунова – Шмидта, который позволяет свести исходную задачу к решению конечномерной системы уравнений раз-

ветвления. Эта система, как правило, имеет высокий порядок. Замечательное наблюдение Виктора Иосифовича состояло в том, что система уравнений разветвления наследует ряд групповых свойств исходной системы дифференциальных уравнений. Это позволяет, с одной стороны, понизить порядок системы уравнений разветвления, а с другой – размножать решения преобразованиями допускаемой ею группы.

Работа [8] породила новое направление в теории ветвления. Сфера применения предложенного Виктором Иосифовичем подхода включает теорию капиллярно-гравитационных волн, ветвление равновесных форм вращающейся жидкости со свободной поверхностью, анализ фазовых переходов в статистической теории кристалла, изучение структур на поверхности магнитной жидкости.

С И.И. Воровичем Виктор Иосифович опубликовал три работы [9 – 11]. Первая из них была посвящена теории гидродинамического удара, начало которой положила работа Н.Е. Жуковского (1882 г.). В работе [9] изучена задача о нецентральной ударе круглого диска о жидкость. Найдено условие его отрыва от свободной поверхности вследствие удара. В работах [10, 11] предложен оригинальный подход к анализу дифференциальных свойств обобщенных решений уравнений Навье – Стокса. С той поры Виктор Иосифович «заболел» уравнениями Навье – Стокса, и эта «болезнь» оказалась неизлечимой. Около трети работ из общего списка публикаций Виктора Иосифовича, насчитывающего 335 наименований, посвящено исследованию начально-краевых задач для этих уравнений и связанных с ними проблем конвекции, теории бифуркаций и гидродинамической теории устойчивости.

Надо сказать, что число монографий и учебников, написанных Виктором Иосифовичем, не так уж велико. Думаю, что это связано с его вовлеченностью во все новые и новые проблемы, к решению которых он привлекал своих учеников и коллег не только из Ростова, но и из других городов и стран.

Большой интерес представляет монография [12]. Время её написания относилось к «золотому веку» советской космической программы. Проблема разделения биополимеров представлялась одной из тех, для решения которой условия космического полета были почти идеальными. С этим были связаны надежды на выделение полезных белковых фракций из их смесей, что очень нелегко сделать на Земле ввиду развития неустойчивости конвективных течений. Считалось, что удастся наладить производство на орбите дефицитных лекарств. Мне трудно сказать, в какой мере данная программа осуществлена. В любом случае разработанная Виктором Иосифовичем



и соавторами теория является математическим фундаментом, необходимым для развития данной отрасли космической технологии.

А годом позже вышла еще одна монография [13]. Не побоюсь сказать, что до работ В.И. Юдовича гидродинамическая теория устойчивости занималась изучением частных, хотя и важных задач. В этой области работали выдающиеся ученые – лорд Рэлей, В. Гейзенберг, Дж.И. Тейлор, Ц.Ц. Линь. Однако используемый ими метод линеаризации не имел математического обоснования. Такое обоснование дал Виктор Иосифович. Для этого ему пришлось существенно продвинуться в теории несамосопряженных операторов.

Занимаясь построением общей теории, В.И. Юдович не избегал исследования конкретных задач. Одна из них – это проблема Куэтта – Тейлора о течении жидкости между вращающимися цилиндрами. Дж.И. Тейлор обнаружил, что после достижения критической скорости вращения внутреннего цилиндра на смену простому течению Куэтта с круговыми линиями тока приходит новое стационарное движение с периодической структурой вихрей. Дальнейший анализ показал, что с увеличением скорости вращения движение становится нестационарным. Причина этого – пересечение нейтральных кривых, отвечающих разным типам бифуркаций. Взаимодействие соответствующих им нейтральных мод вблизи точки бифуркации можно описать в терминах решения динамической системы амплитудных уравнений. Это было сделано независимо Виктором Иосифовичем и французскими учеными Ж. Иоссом и Ф. Шосса в 1986 г.

Выше я упомянул лишь о некоторых направлениях научной деятельности Виктора Иосифовича. Они далеко не исчерпывают его научное наследие, включающее также труды по вибрационной механике и работы последних лет жизни по задаче протекания для идеальной жидкости совместно с учениками. Список его работ украсил бы биографию любого представителя академической науки, однако, работая в вузе, он считал необходимым писать учебники и методические пособия. Нужно обладать немалой смелостью, чтобы написать новый курс уравнений математической физики. Ведь только в отечественной литературе имеются прекрасные учебники И.Г. Петровского, С.Л. Соболева, А.Н. Тихонова и А.А. Самарского, В.С. Владимиров, С.К. Годунова. Но смелость всегда была присуща Виктору Иосифовичу. Его лекции по этому предмету [14, 15] содержали не только классический материал, но и дополнение к нему в виде упражнений, которые не найдешь в известных задачах.

Мне не довелось слушать лекции Виктора Иосифовича, но я уверен, что на них никогда не было скучно. Вот как он начинает излагать хрестоматийную тему – принцип максимума и его следствия:

«Пирог, посаженный в духовку, нередко подгорает снаружи, но вряд ли кто-нибудь видел, чтобы он подгорел внутри, оставаясь снаружи сырым. Это наводит на мысль, что максимальная температура достигается на границе тела. Но в недрах Солнца и звезд температура много больше, чем на их поверхности. Причиной тому – внутренние источники тепла от термоядерных реакций. Далее мы увидим, что при отсутствии источников тепла (отрицательные источники, или стоки, – допустимы) температура действительно принимает максимальное значение на границе стержня – или в начальный момент, потому что в начальный момент можно создать произвольное распределение температуры».

Далее следуют доказательства принципа максимума для линейного уравнения теплопроводности в случае однородного стержня постоянной длины, его обобщения на случай переменной длины стержня и на случай, когда коэффициент теплопроводности зависит от температуры. Затем идут многомерные аналоги принципа максимума, теоремы единственности, априорные оценки решений параболического уравнения с младшими членами и доказательства существования классического решения задачи о кольце в случае, когда начальная функция всего лишь непрерывна. Здесь слушатели знакомятся с применением теоремы Банаха – Штейнгауза в конкретной ситуации.

Еще одно учебное пособие, написанное Виктором Иосифовичем вместе с А.А. Есиповым и Л.И. Сазоновым [16], я бы назвал книгой для занимательного чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Эта книга популярна и поныне.

Широта научного диапазона Виктора Иосифовича позволяла ему готовить специалистов по многим направлениям математики и механики: математический анализ, дифференциальные уравнения, вычислительная математика, механика жидкости, газа и плазмы, механика деформируемого твердого тела, математическое моделирование. Он является основателем ведущей научной школы РФ, неоднократно получавшей государственную поддержку.

Для многих ученых Виктор Иосифович был учителем и наставником, но иногда дистанция сокращалась. Это случалось во время игры в баскетбол или в шахматы, а также во время пробежек с младшими товарищами по левому берегу Дона. Порой кроссовая дистанция, начинавшаяся от дома Виктора Иосифовича, достигала 14 км. Мне расска-

зывали, как один молодой ученик, совсем не предполагавший бегать, встретил Виктора Иосифовича, который уже начинал свой путь в сторону моста через Дон. Желание пообщаться с ним было так велико, что молодой человек побежал вместе с Виктором Иосифовичем, несмотря на отсутствие спортивной формы. К счастью, в тот раз дистанция кросса была короче.

Память возвращает меня к жаркому лету 1968 г. Виктор Иосифович пригласил меня остановиться в коммунальной квартире, где он проживал вместе с женой и дочерью. «Прекрасная составляющая» их семьи в те дни отдыхала на побережье, отношения с соседом по коммуналке были нормальными, и мы втроем спасались от жары зеленым чаем (средством, неведомым до той поры). Однако радикальным спасением от жары был дневной сон. Творческий процесс начинался ближе к вечеру и продолжался до середины ночи. Помню наши ночные прогулки по Пушкинской улице. Ее бульвар в то время не был вымощен квадратной плиткой, зато на нем росли роскошные деревья и стояли автоматы с газировкой за копеечную цену.

Однажды Виктор Иосифович рассказал мне о задаче, восходящей к знаменитой работе Ж. Лерэ, в которой рассматривалась стационарная задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в области, на границе которой задано поле скорости. Граница области течения может иметь несколько компонент связности. (Простейший пример такой области – сферический слой). В силу условия несжимаемости, суммарный расход жидкости через границу области равен нулю. Лерэ доказал разрешимость задачи в предположении нулевого расхода через каждую связную компоненту границы. Имеет ли стационарная задача протекания для уравнений Навье – Стокса решение в общем случае, до сих пор неизвестно.

Проблема Лерэ занимала умы более чем сорока ученых из одиннадцати стран. Она вошла в число перечисленных Виктором Иосифовичем одиннадцати великих проблем математической гидродинамики.

Мой рассказ о Викторе Иосифовиче я назвал «Дальное действие». Тем самым хотелось подчеркнуть влияние его работ и его личности на научное сообщество как в пространстве, так и во времени. Я испытывал это влияние на протяжении сорока лет нашего знакомства и дружбы; ощущаю это влияние и сейчас.

## Литература

1. *Срубцик Л.С., Юдович В.И.* Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично нагруженной пластины // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 3. С. 657 – 672.
2. *Любимов Д.В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. Т. 16, № 2. С. 131 – 137.
3. *Юдович В.И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, вып. 5. С. 142 – 148.
4. *Юдович В.И.* Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // Мат. заметки. 1996. Т. 60, вып. 2. С. 313 – 317.
5. *Юдович В.И.* О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивании // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 1. С. 22 – 34.
6. *Юдович В.И.* Косимметрия и консервативные системы // Избр. труды. Т. 3. Ростов н/Д., 2009. С. 177 – 286.
7. *Юдович В.И.* Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. вузов. Сев-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск «Математическое моделирование». 2001. С. 175 – 178.
8. *Юдович В.И.* Свободная конвекция и ветвление // ПММ. 1967. Т. 31, вып. 1. С. 101 – 111.
9. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ. 1957. Т. 21, вып. 4. С. 525 – 532.
10. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, вып. 3. С. 542 – 545.
11. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб. 1961. Т. 53, № 4. С. 393 – 428.
12. *Юдович В.И., Бабский В.Г., Жуков М.Ю.* Математическая теория электрофореза: применение к методам фракционирования биополимеров. Киев, 1983. 202 с.
13. *Юдович В.И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов н/Д., 1984. 191 с.
14. *Юдович В.И.* Лекции об уравнениях математической физики. Ростов н/Д., 1998. 240 с.
15. *Юдович В.И.* Лекции об уравнениях математической физики. Часть вторая. Ростов н/Д., 1999. 255 с.
16. *Есипов А.А., Сазонов Л.И., Юдович В.И.* Руководство к решению задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ростов н/Д., 1989. 336 с.

**НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ И ПРИКЛАДНОЙ ЖУРНАЛ  
ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.  
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

Журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки», имеющий статус центрального издания, включенного в перечень ВАК, продолжает прием работ по следующим отраслям науки:

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Физико-математические науки (математика, механика).</li> <li>2. Биологические науки (общая биология, физико-химическая биология).</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. Науки о Земле.</li> </ol> <p>Также публикуются материалы в разделах:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– заметки о книгах;</li> <li>– научная жизнь.</li> </ul> |
|--|--|

Журнал издается с периодичностью 4 номера в год. Помимо основных номеров выходят специальные тематические выпуски, посвященные разным научным направлениям, работам отдельных организаций, а также научные труды вузов, приуроченные к юбилейным датам. С электронной версией журнала можно ознакомиться на сайте Научной электронной библиотеки [http://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=7362](http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7362)

Авторы, сохраняя за собой авторские права на работу, и передавая журналу «Известия вузов. Северо-Кавказский регион» право первой публикации, автоматически принимают на себя обязательство не печатать её ни полностью, ни частично в каком-либо издании без указания ссылки на оригинальную публикацию в этом журнале.

Публикация материалов, на которые получена положительная рецензия, оплачивается лично автором или организацией. Стоимость работ – договорная.

Перечень представляемых авторами материалов:

1. Текст статьи. Указать индекс УДК.
2. Электронный вариант статьи. Текст должен быть набран в редакторе Microsoft Office Word 97 – 2003, 2007 через 1,5 интервала, шрифтом Times New Roman размером 14 пт, страницы пронумерованы. **Для записи формул применять редактор формул Equation 3.0.**
3. Сопроводительное или рекомендательное письмо, если статья представляется от организации.
4. Полное название организации и ее адрес на русском и английском языках.
5. Сведения об авторах с указанием адреса, по которому будет вестись переписка, на русском и английском языках.
6. Название статьи и фамилии авторов на русском и английском языках.
7. Аннотация на русском и английском языках (500 знаков/10 строк).
8. Ключевые слова на русском и английском языках.
9. Статья и все дополнительные материалы могут быть присланы в редакцию по электронной почте.

Журнал распространяется по подписке – через ОАО «Роспечать» в подписной период. Подписной индекс – 70415 (подписка на полугодие).

В неподписной период отдельные номера журнала за нынешний и прошлые годы можно приобрести в редакции.

Адрес для переписки: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42, ЮФУ.

Редакция журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

тел. 218-40-00 доб. 11-093 или тел. 218-40-00 доб. 11-094.

E-mail: [izvestiya@sfedu.ru](mailto:izvestiya@sfedu.ru)

Адрес в интернете: [www.izvestiya.sfedu.ru](http://www.izvestiya.sfedu.ru)

ISSN 0321–3005. DOI 10.18522/0321-3005-2016-2.

Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.  
2016. № 2.